

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-p(l-x)}{EI} = \frac{-pl + px}{EI}$$

$$\int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int \frac{-pl + px}{EI} dx$$

$$\text{(A)} \quad EI \frac{dy}{dx} = -plx + \frac{px^2}{2} + C_1$$

$$\text{(B)} \quad EI y = -\frac{plx^2}{2} + \frac{px^3}{6} + C_1 x + C_2$$

BVP
Boundary
Problem

$$\text{Si } x=0 \rightarrow y=0$$

Sustituyendo en B

$$\hookrightarrow 0 = -0 + 0 + 0 + C_2$$

$$\hookrightarrow C_2 = 0$$

Sustituyendo en A

$$\hookrightarrow x=0 \rightarrow \theta = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = -0 + 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

De manera que:

$$\theta \rightarrow EI \frac{dy}{dx} = -Plx + \frac{Px^2}{2}$$

$$\delta \rightarrow EI y = \frac{-Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6}$$

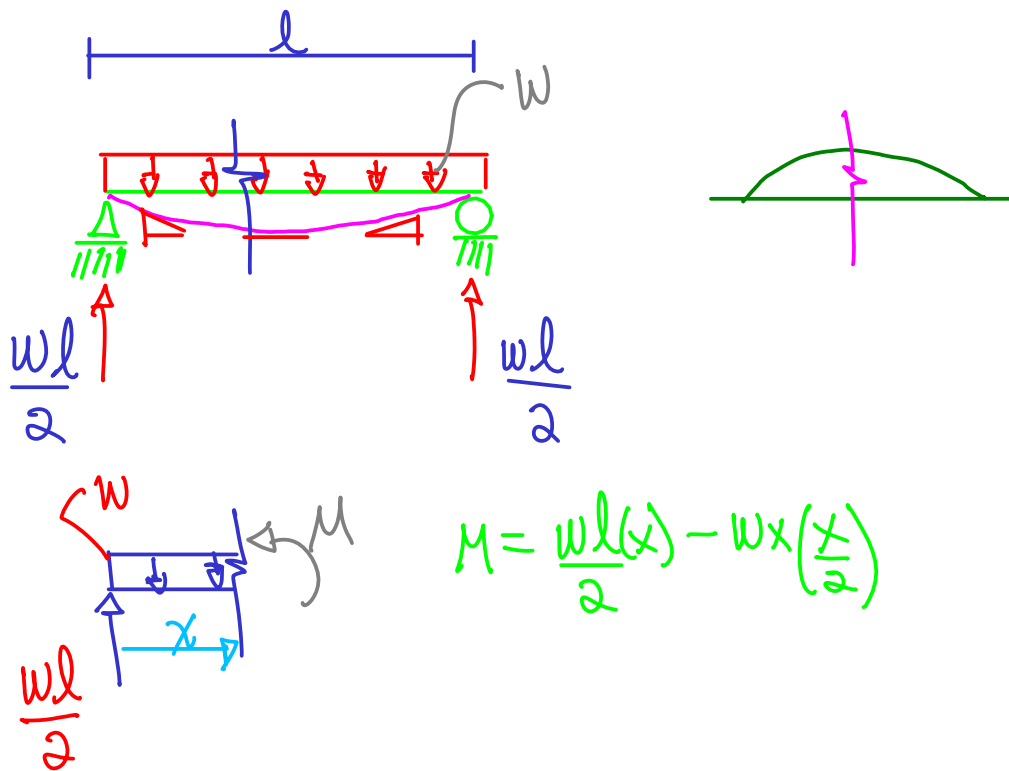
Rotación y pendiente en el extremo libre "B"

$$x_B = l$$

$$\theta_B = EI \frac{dy}{dx} = -Pl^2 + \frac{Pl^2}{2} = \frac{-Pl^2}{2}$$

$$\theta_B = \frac{-Pl^2}{2EI}$$

$$y_B = \frac{-Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{6} = -\frac{Pl^3}{3EI}$$



$$M = \frac{wl(x)}{2} - wx\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$\int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \left(\frac{1}{EI} \right) \int \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} dx$$

$$(a) \quad \theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$(b) \quad \delta = EI y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Condiciones de frontera

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$B \rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x=l \rightarrow y=0$$

$$B = 0 = \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} + C_1 l + 0$$

$$C_1 = -\frac{wl^3}{24}$$

↳ Pendiente θ

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^3}{24}$$

↳ Desplazamiento Δ

$$EI y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3}{24} x$$

Deflexión al centro del claro y la pendiente en A.

Deflexión $x = l/2$

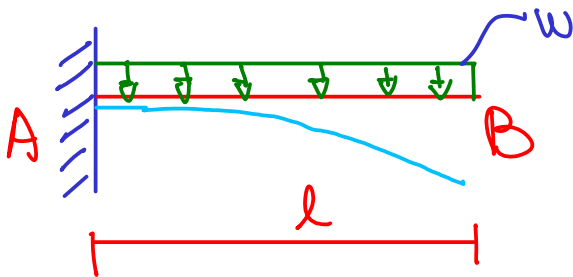
$$EI y = \frac{wl^4}{96} - \frac{wl^4}{384} - \frac{wl^4}{48} = -\frac{5wl^4}{384}$$

$$y = \frac{-5wl^4}{384EI}$$

Pendiente $x = 0$

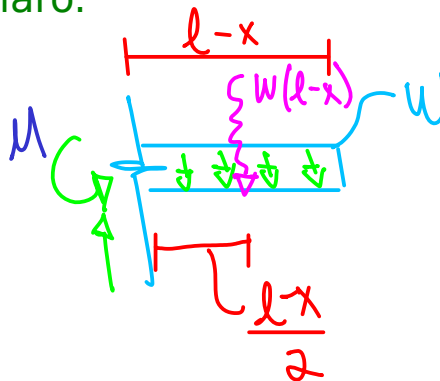
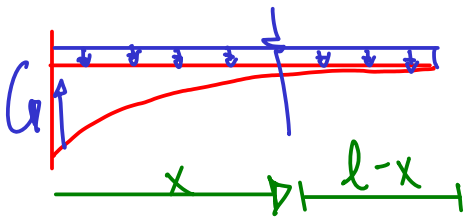
$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^3}{24}$$

$$EI \theta = -\frac{wl^3}{24} \rightarrow \theta = \frac{-wl^3}{24EI}$$



Calcule las ecuaciones para la pendiente y la deflexión.

Compare la deflexión en B con la deflexión al centro del claro.



$$M = w(l-x) \left(\frac{l-x}{2} \right)$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{w(l-x)^2}{2}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{w(l-x)^2}{2} = -\frac{w(l^2 - 2lx + x^2)}{2}$$

$$2EI \frac{dy}{dx} = -wl^2 x + \cancel{2}wlx^2 - \frac{wx^3}{3} + C_1 \quad (\alpha)$$

$$2EIy = \frac{-wl^2x^2}{2} + \frac{wlx^3}{3} - \frac{wx^4}{12} + C_1x + C_2 \quad (\beta)$$

Condiciones de frontera

$$x=0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$A \rightarrow 0 = -0 + 0 - 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

$$x=0 \rightarrow y = 0$$

$$B \rightarrow 0 = -0 + 0 - 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

Ecuaciones

$$A \rightarrow 2EI \frac{dy}{dx} = -wl^2x + wx^2 - \frac{wx^3}{3}$$

$$A \rightarrow 2EIy = \frac{-wl^2x^2}{2} + \frac{wx^3}{3} - \frac{wx^4}{12}$$

Deflexiones

$$x=l \quad 2EI\Delta_B = \frac{-wl^4}{2} + \frac{wl^4}{3} - \frac{wl^4}{12} = \frac{-wl^4}{4}$$

$$\Delta_B = \frac{-wl^4}{8EI}$$

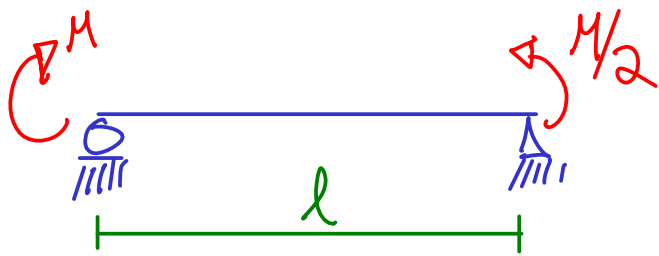
$$x=\frac{l}{2} \quad 2EI\Delta_C = \frac{-wl^4}{8} + \frac{wl^4}{24} - \frac{wl^4}{192} = \frac{-17wl^4}{192}$$

$$\Delta_C = \frac{-17wl^4}{384EI}$$

Comparación

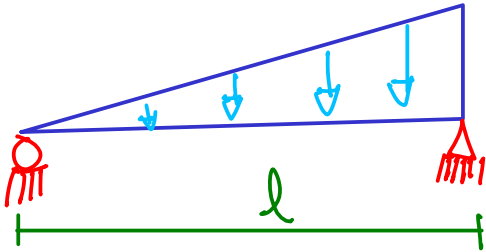
$$\frac{\Delta_C}{\Delta_B} = \frac{-17/384}{-1/8} = 0.35$$

Al centro del claro se ha usado el 35% de la deflexión total.



9.3 Leet & Uang.

Encuentre las ecuaciones para la pendiente y la deflexión para la viga de la figura. Calcule la deflexión máxima. Pista: La deflexión máxima ocurre en el punto de pendiente cero.



Encuentre la ecuación para la pendiente y la deflexión para la viga de la figura. Ubique el punto de deflexión máxima y calcule su magnitud. Leet & Uang, 9.4.

Establezca las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga de la figura.

Evalúe la magnitud de la pendiente en cada apoyo. Exprese su respuesta en función de EI .

