

$$E, A, I = \text{constant}$$

$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$A = 35,000 \text{ mm}^2$$

$$I = 152(10^6) \text{ mm}^4$$

## Liberaciones de Momentos

Resuelva el marco de la izquierda para las cargas mostradas.

Encuentre los desplazamientos en los nodos, las fuerzas locales en los miembros y las reacciones en los apoyos.

Modele al miembro horizontal como articulado en su extremo izquierdo y al inclinado como articulado en su extremo más bajo.

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 19 & 10 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$y := \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$E := \begin{bmatrix} 30 \cdot 10^6 \\ 30 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

$$A := \begin{bmatrix} 35000 \\ 1000^2 \\ 35000 \\ 1000^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.035 \\ 0.035 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

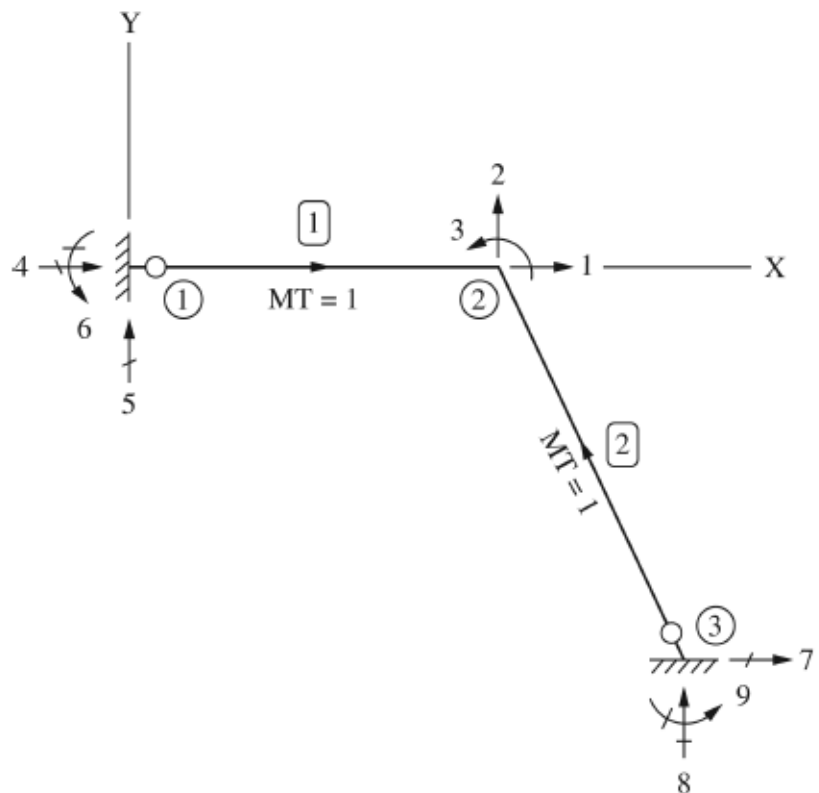
$$I := \begin{bmatrix} 152 \cdot 10^6 \\ 1000^4 \\ 152 \cdot 10^6 \\ 1000^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0002 \end{bmatrix} \text{ m}^4$$

$$L := \begin{bmatrix} 10 \\ \sqrt{9^2 + 12^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 30 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$V := \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot 10}{2} & \frac{12 \cdot 10}{2} \\ -\frac{45}{2} & -\frac{45}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 60 \\ -22.5 & -22.5 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot 10^2}{12} & -\frac{12 \cdot 10^2}{12} \\ -\frac{45 \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}}{8} & \frac{45 \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -84.375 & 84.375 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$



\* Cuidado con los signos. Se ven "al revés" por el sentido de la viga.

☐ Fórmulas

$$k_{\text{inicioArticulado}}(n) := \frac{E_n \cdot I_n}{L_n^3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_n \cdot L_n^2}{I_n} & 0 & 0 & -\frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \cdot L_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 & \frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3 \cdot L_n \\ 0 & 3 \cdot L_n & 0 & 0 & -3 \cdot L_n & 3 \cdot L_n^2 \end{bmatrix} Q_{\text{fInicioArticulado}}(n) := \begin{bmatrix} N_{n1} \\ V_{n1} - \frac{3}{2 \cdot L_n} \cdot M_{n1} \\ 0 \\ N_{n2} \\ V_{n2} + \frac{3}{2 \cdot L_n} \cdot M_{n1} \\ M_{n2} - \frac{1}{2} \cdot M_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\text{seno}(n) := \frac{Y_{n2} - Y_{n1}}{L_n} \quad \text{coseno}(n) := \frac{x_{n2} - x_{n1}}{L_n}$$

$$T(n) := \begin{bmatrix} \text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de rigidez de las barras

$$k_1 := k_{\text{inicioArticulado}}(1) = \begin{bmatrix} 1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 13.68 & 0 & 0 & -13.68 & 136.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -13.68 & 0 & 0 & 13.68 & -136.8 \\ 0 & 136.8 & 0 & 0 & -136.8 & 1368 \end{bmatrix}$$

[ 4 5 6 1 2 3 ]

$$K_1 := T(1)^T \cdot k_{\text{inicioArticulado}}(1) \cdot T(1) = \begin{bmatrix} 1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 13.68 & 0 & 0 & -13.68 & 136.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -13.68 & 0 & 0 & 13.68 & -136.8 \\ 0 & 136.8 & 0 & 0 & -136.8 & 1368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f1} := Q_{\text{fInicioArticulado}}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 75 \\ -150 \end{bmatrix} \quad F_{f1} := T(1)^{-1} \cdot Q_{\text{fInicioArticulado}}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 75 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 := k_{\text{inicioArticulado}}(2) = \begin{bmatrix} 70000 & 0 & 0 & -70000 & 0 & 0 \\ 0 & 4.0533 & 0 & 0 & -4.0533 & 60.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -70000 & 0 & 0 & 70000 & 0 & 0 \\ 0 & -4.0533 & 0 & 0 & 4.0533 & -60.8 \\ 0 & 60.8 & 0 & 0 & -60.8 & 912 \end{bmatrix}$$

$$K_2 := T(2)^T \cdot k_{\text{inicioArticulado}}(2) \cdot T(2)$$

[ 7 8 9 1 2 3 ]

$$K_2 = \begin{bmatrix} 25202.5941 & -33598.0544 & 0 & -25202.5941 & 33598.0544 & -48.64 \\ -33598.0544 & 44801.4592 & 0 & 33598.0544 & -44801.4592 & -36.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25202.5941 & 33598.0544 & 0 & 25202.5941 & -33598.0544 & 48.64 \\ 33598.0544 & -44801.4592 & 0 & -33598.0544 & 44801.4592 & 36.48 \\ -48.64 & -36.48 & 0 & 48.64 & 36.48 & 912 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f2} := Q_{f\text{InicioArticulado}}(2) = \begin{bmatrix} 30 \\ -14.0625 \\ 0 \\ 30 \\ -30.9375 \\ 126.5625 \end{bmatrix}$$

$$F_{f2} := T(2)^{-1} \cdot Q_{f\text{InicioArticulado}}(2) = \begin{bmatrix} -6.75 \\ 32.4375 \\ 0 \\ 6.75 \\ 42.5625 \\ 126.5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura y vector de fuerzas de extremo fijo

$$S := \begin{bmatrix} K_{1\ 4\ 4} + K_{2\ 4\ 4} & K_{1\ 4\ 5} + K_{2\ 4\ 5} & K_{1\ 4\ 6} + K_{2\ 4\ 6} \\ K_{1\ 5\ 4} + K_{2\ 5\ 4} & K_{1\ 5\ 5} + K_{2\ 5\ 5} & K_{1\ 5\ 6} + K_{2\ 5\ 6} \\ K_{1\ 6\ 4} + K_{2\ 6\ 4} & K_{1\ 6\ 5} + K_{2\ 6\ 5} & K_{1\ 6\ 6} + K_{2\ 6\ 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.302 \cdot 10^5 & -33598.0544 & 48.64 \\ -33598.0544 & 44815.1392 & -100.32 \\ 48.64 & -100.32 & 2280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P_f := \begin{bmatrix} F_{f1\ 4} + F_{f2\ 4} \\ F_{f1\ 5} + F_{f2\ 5} \\ F_{f1\ 6} + F_{f2\ 6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.75 \\ 117.5625 \\ -23.4375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vector de cargas nodales

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema

$$d := S^{-1} \cdot (P - P_f) = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0033 \\ 0.0102 \end{bmatrix}$$

Fuerzas y desplazamientos en los extremos de los miembros

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0033 \\ 0.0102 \end{bmatrix} \quad u_1 := T(1) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0033 \\ 0.0102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 := k_1 \cdot u_1 + Q_{f1} = \begin{bmatrix} 94.6045 \\ 46.434 \\ 0 \\ -94.6045 \\ 73.566 \\ -135.6602 \end{bmatrix}$$

$$F_1 := K_1 \cdot v_1 + F_{f1} = \begin{bmatrix} 94.6045 \\ 46.434 \\ 0 \\ -94.6045 \\ 73.566 \\ -135.6602 \end{bmatrix} \begin{matrix} [4] \\ [5] \\ [6] \\ [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0033 \\ 0.0102 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := T(2) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0021 \\ 0.0027 \\ 0.0102 \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ [9] \\ [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$Q_2 := k_2 \cdot u_2 + Q_{f2} = \begin{bmatrix} 175.6155 \\ -13.456 \\ 0 \\ -115.6155 \\ -31.544 \\ 135.6602 \end{bmatrix}$$

$$F_2 := K_2 \cdot v_2 + F_{f2} = \begin{bmatrix} -94.6045 \\ 148.566 \\ 0 \\ 94.6045 \\ -73.566 \\ 135.6602 \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ [9] \\ [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

Reacciones

$$R := \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94.6045 \\ 46.434 \\ 0 \\ -94.6045 \\ 148.566 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} [4] \\ [5] \\ [6] \\ [7] \\ [8] \\ [9] \end{matrix}$$

