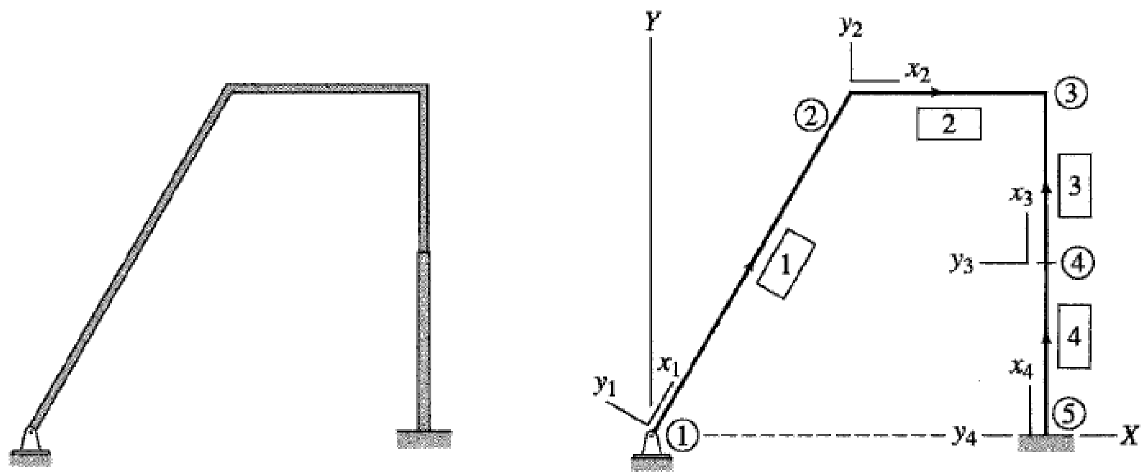
Análisis Estructural Matricial

Aunque tanto el método de flexibilidades (fuerzas) como el de rigideces (desplazamientos) se pueden expresar de manera matricial, el método de las rigideces es mucho más sistemático y se puede implementar más fácilmente en computadoras.

Modelo Analítico

En el método matricial de las rigideces, para el análisis estructural, se considera a una estructura como un ensamblaje de miembros rectos, conectados en sus extremos a nodos. *Un miembro se define como la parte de la estructura para la cual resultan válidas las relaciones fuerza-desplazamiento*. En otras palabras, dados los desplazamientos en los extremos de un miembro, uno debe de ser capaz de determinar las fuerzas y los momentos en sus extremos empleando las relaciones fuerza-desplazamiento. *Un nodo se define como una parte estructural de tamaño infinitesimal hacia la cual se conectan los extremos de los miembros.*

Antes de proceder con el análisis, se debe preparar un modelo analítico de la estructura. El modelo se representa por medio de un diagrama de líneas de la estructura, en el cual se identifican todos los nodos y miembros con números.



(a) Actual Frame (c) Global and Local Coordinate Systems

Considere el marco de la figura anterior. El modelo analítico es el mostrado en la figura a mano derecha, en el cual los números de los nodos están encerrados dentro de círculos, para distinguirlos de los números de los miembros, que están encerrados dentro de rectángulos. Se considera que el marco está conformado por cuatro miembros y cinco nodos. Ya que las relaciones fuerza-desplazamiento sólo son válidas para miembros prismáticos, la columna vertical ha sido subdividida en dos miembros, cada uno con propiedades de sección transversal constantes (inercia y área) a lo largo de la totalidad de su longitud.

Sistemas de Coordenadas Locales y Globales

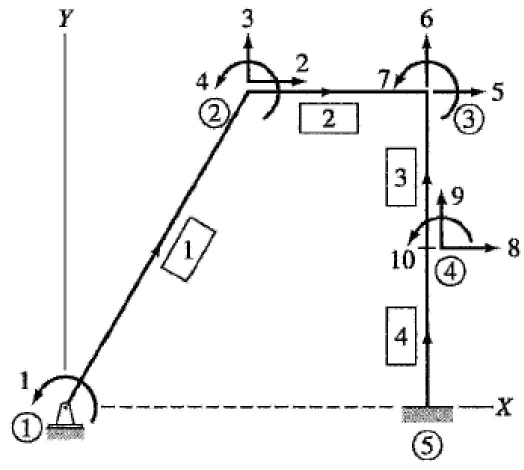
En el método de las rigideces, la geometría en general, y el comportamiento estructural son descritos con referencia a un *sistema de coordenadas global* rectangular o Cartesiano. El sistema global que emplearemos será un sistema XYZ de la mano derecha, con el plano de la estructura yaciendo en el plano XY, como se muestra en la figura de la página anterior.

Debido a que es comúnmente conveniente el derivar las relaciones fuerza-desplazamiento en términos de las fuerzas y los desplazamientos en las direcciones a lo largo de y perpendicular a los miembros, un *sistema de coordenadas local* se define para cada miembro de la estructura. El origen del sistema coordenado local xyz para un miembro se puede ubicar arbitrariamente en uno de sus extremos, con el eje x dirigido a lo largo del eje centroidal del miembro. La dirección positiva del eje y se escoge de manera que el sistema coordenado sea de la mano derecha, con el eje local z apuntando en la dirección positiva del eje global Z. En la figura de la página anterior, la dirección positiva del eje x de cada miembro se indica al dibujar una flecha a lo largo de cada miembro en el diagrama de líneas de la estructura. Por ejemplo, esta figura indica que el origen del sistema de coordenadas local para el miembro 1 está ubicado en su extremo conectado con el nodo 1, con el eje x1 dirigido desde el nodo 1 hacia el nodo 2. El nodo con el cual el extremo del miembro está conectado con el origen del sistema de coordenadas local se conoce como el *nodo de inicio* del miembro, mientras que el nodo adyacente al extremo opuesto del miembro se denomina *nodo de fin*. Por ejemplo, el miembro 1 comienza en el nodo 1 y termina en el nodo 2, mientras que el miembro 2 comienza en el nodo 2 y termina en el nodo 3, y así sucesivamente. Una vez que el eje x local se ha definido para un miembro, el eje y correspondiente se puede establecer aplicando la regla de la mano derecha. Los ejes y locales obtenidos, para los miembros del marco bajo consideración, se muestran en la figura. Aprecie que, para cada miembro, si enroscamos los dedos de nuestra mano derecha de la dirección del eje x hacia la dirección del eje y correspondiente, entonces nuestro pulgar extendido apuntaría hacia fuera del plano de la página, lo cual sería la dirección positiva del eje Z global.

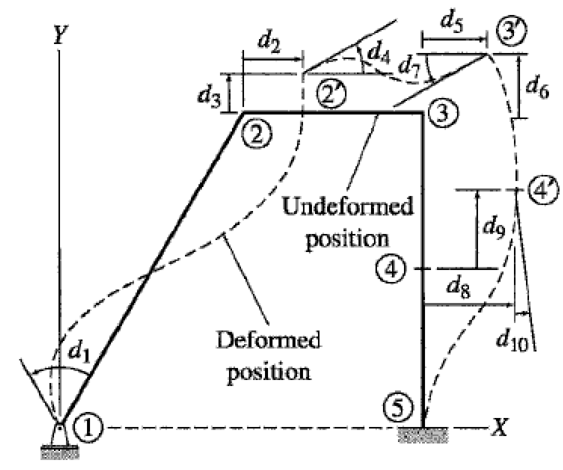
Grados de libertad

Los grados de libertad de una estructura son los desplazamientos independientes de los nodos (traslaciones y rotaciones) que son necesarios para especificar la configuración deformada de la estructura cuando se somete a una carga arbitraria.

Considere de nuevo el marco plano mostrado. La forma deformada de éste, para cualquier carga arbitraria se muestra en la figura siguiente con una escala exagerada.



(b) Analytical Model



(d) Degrees of Freedom

A diferencia del caso de los métodos clásicos de análisis estructural considerados previamente, no es usualmente necesario despreciar las deformaciones axiales de los miembros al analizar marcos por el método matricial de las rigideces. De la figura (d), podemos apreciar que el nodo 1, que se localiza en el apoyo articulado, puede rotar, pero no trasladarse. Por lo tanto, el nodo 1 sólo tiene un grado de libertad, el cual se designa como d1 en la figura. Ya que la unión (nodo) 2 del marco no está adjunta a ningún apoyo, se requiere de tres desplazamientos (las traslaciones d2 y d3 en las direcciones X y Y respectivamente, y la rotación d4 alrededor del eje Z) para satisfacer completamente la posición deformada 2'. De tal manera, la junta (nodo) 2 tiene tres grados de libertad. Similarmente, las uniones 3 y 4, que también son juntas libres, tienen tres grados de libertad cada una. Finalmente, el nodo 5, que está adjunto a un apoyo empotrado ni puede trasladarse ni rotar, por lo tanto, no posee ningún grado de libertad. De tal forma, el marco entero tiene un total de diez grados de libertad. Como se muestra en el inciso (d), los desplazamientos de los nodos se definen en relación al sistema de coordenadas global, con las traslaciones de los nodos consideradas como positivas cuando están en las direcciones positivas de los ejes X y Y, y las rotaciones de los nodos consideradas como positivas cuando son en contra del reloj. Vea que todos los desplazamientos de los nodos se muestran en el sentido positivo en nuestra figura. Los desplazamientos de los nodos del marco se pueden escribir colectivamente de manera matricial como:

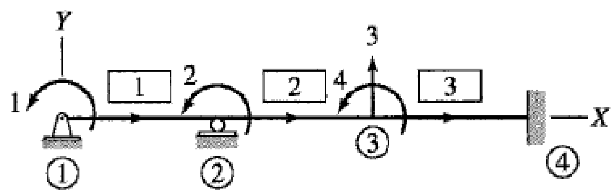
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix}$$

Donde $\mathbf{d}$ se denomina el *vector de desplazamientos de los nodos* de la estructura.

Al aplicar el método de las rigideces, no es necesario dibujar la configuración deformada de la estructura para identificar sus grados de libertad. En su lugar, los grados de libertad se pueden especificar directamente en el diagrama de líneas de la estructura al dibujar flechas en los nodos. Los grados de libertad se numeran comenzando en el nodo de menor número, y procediendo secuencialmente hasta el nodo de número más alto. En el caso de más de un grado de libertad por nodo, la traslación en la dirección X se numera primero, seguida de la traslación en la dirección Y, y luego la rotación.

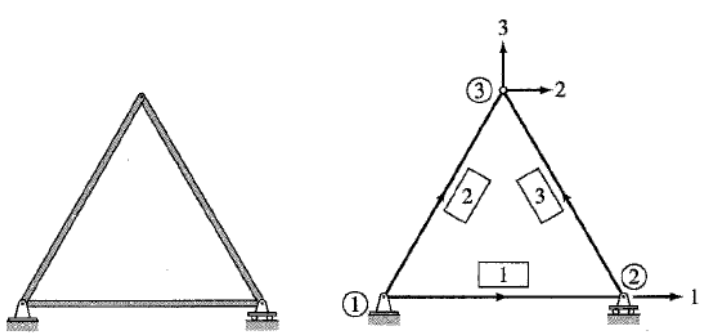
En vigas continuas, sometidas a cargas laterales, las deformaciones axiales de los miembros son cero. Por lo tanto, no es necesario el considerar los desplazamientos de los nodos en la dirección del eje centroidal de la viga. De tal forma, un nodo de una viga plana continua puede tener sólo hasta dos grados de libertad, a saber, una traslación perpendicular al eje centroidal de la viga, y una rotación. Por ejemplo, la viga continua que se muestra a continuación posee cuatro grados de libertad.

(a) Actual Continuous Beam



(b) Analytical Model and Degrees of Freedom

Desde el momento en que las juntas de las armaduras se asumen como pasadores sin fricción, ellas no están sometidas a momentos; por lo tanto, sus rotaciones son cero. Entonces, al analizar armaduras planas, sólo dos grados de libertad, a saber, las traslaciones en las direcciones globales X y Y, deben ser consideradas para cada nodo. Por ejemplo, la armadura de a continuación posee tres grados de libertad.



(a) Actual Truss (b) Analytical Model and Degrees of Freedom

Relaciones de Rigidez de los Miembros en las Coordenadas Locales

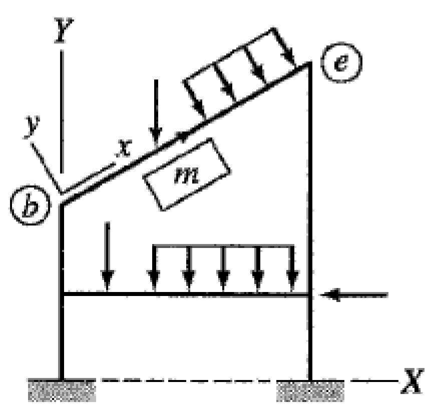
En el método de análisis matricial de las rigideces, los desplazamientos de los nodos de la estructura se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas, el cual se expresa en la forma:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Sd}$$

En donde $\mathbf{d}$ denota al vector de desplazamientos de los nodos, $\bar{\mathbf{P}}$ representa los efectos de las cargas externas en las juntas de la estructura y $\mathbf{S}$ es la denominada *matriz de rigidez de la estructura*. $\mathbf{S}$ se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de todos los miembros individuales de la estructura. *La matriz de rigidez de un elemento se emplea para expresar las fuerzas en los extremos del miembro como funciones de los desplazamientos en los extremos de los miembros*. Vea que los términos *fuerzas* y *desplazamientos* se usan en el sentido general para incluir momentos y rotaciones, respectivamente. En esta sección, derivaremos las matrices de rigidez para los miembros de marcos planos, vigas continuas y armaduras planas en el sistema de coordenadas locales de los miembros.

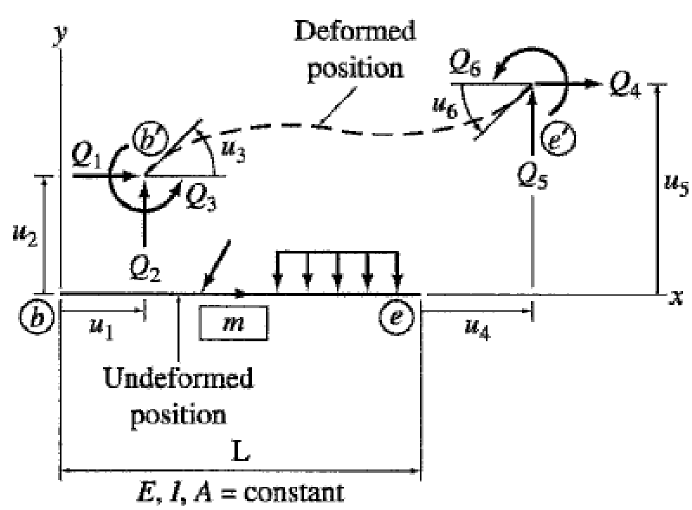
Elementos Tipo Marco

Para establecer las relaciones de rigidez de los miembros de marcos planos, enfoquemos nuestra atención en un miembro arbitrario prismático m del marco siguiente.



(a) Frame

Cuando el marco se ve sometido a cargas externas, el miembro m se deforma y fuerzas internas se inducen en sus extremos. Las posiciones deformadas y sin deformar del miembro son las siguientes:



(b) Frame Member — Local Coordinates

Como se indica por la última figura, se precisa de tres desplazamientos (traslaciones en las direcciones x y y, y rotación respecto al eje z) para especificar completamente la posición deformada de cada extremo del miembro. Entonces, el miembro tiene un total de seis desplazamientos en los extremos, o grados de libertad.

Vea de la figura, que los desplazamientos de los extremos de los miembros se nombran desde u_1 hasta u_6, y las fuerzas correspondientes en los extremos de los miembros como Q_1 hasta Q_6. Vea que estas fuerzas y desplazamientos de los extremos están definidas respecto al sistema de coordenadas local del miembro, con las traslaciones y fuerzas consideradas como positivas cuando van en la dirección positiva de los ejes locales x y y, y las rotaciones y momentos consideradas como positivas cuando están en contra del reloj. Los desplazamientos de los extremos de los miembros y las fuerzas están numerados comenzando en el extremo del miembro b, donde el origen del sistema de coordenadas local se ubica, con la traslación y la fuerza en la dirección x numeradas primero, seguidas de las traslaciones y las fuerzas en la dirección y, y luego las rotaciones y los momentos. Los desplazamientos y las fuerzas en el extremo opuesto del miembro e se numeran después en el mismo orden secuencial.

Nuestro objetivo aquí es determinar las relaciones entre las fuerzas en los extremos de los miembros y los desplazamientos en los extremos en términos de las cargas externas aplicadas al miembro. Dichas relaciones se pueden establecer convenientemente sometiendo al miembro, por separado, a cada uno de los seis desplazamientos en los extremos y a las cargas aplicadas, y expresando las fuerzas totales de los extremos de los miembros como la suma algebraica de las fuerzas en los extremos requeridas para causar desplazamientos en los extremos individuales y las fuerzas causadas por las cargas externas. Entonces, se puede ver que:

$$Q_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + k_{14}u_4 + k_{15}u_5 + k_{16}u_6 + Q_{f1}$$

$$Q_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 + Q_{f2}$$

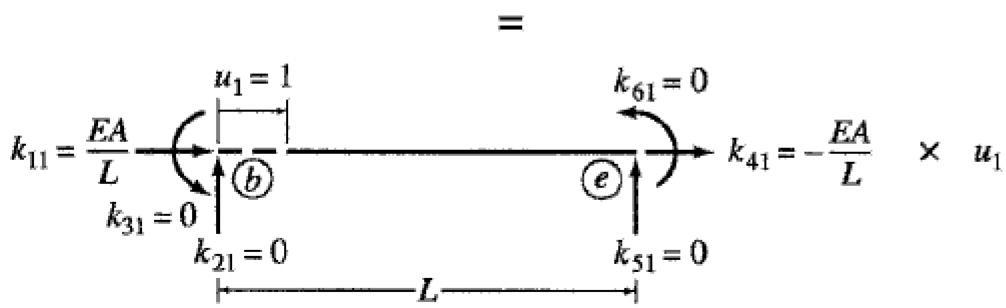
$$Q_3 = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{34}u_4 + k_{35}u_5 + k_{36}u_6 + Q_{f3}$$

$$Q_4 = k_{41}u_1 + k_{42}u_2 + k_{43}u_3 + k_{44}u_4 + k_{45}u_5 + k_{46}u_6 + Q_{f4}$$

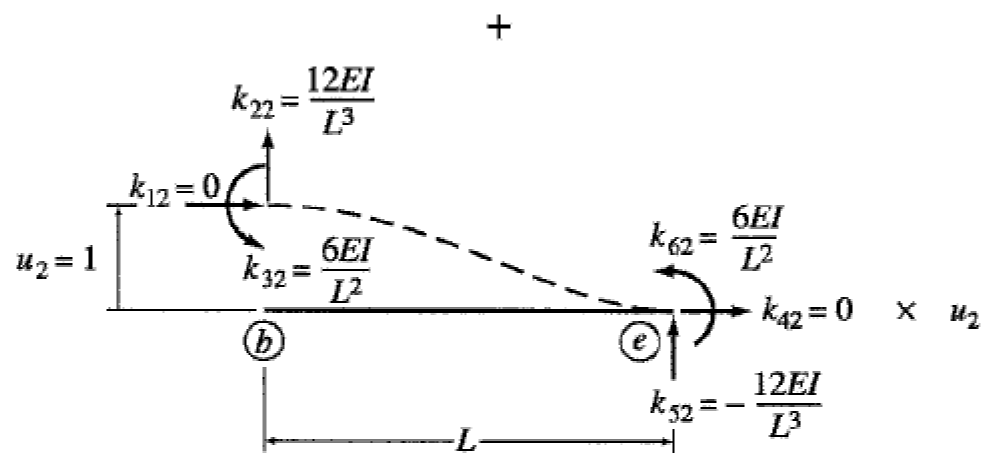
$$Q_5 = k_{51}u_1 + k_{52}u_2 + k_{53}u_3 + k_{54}u_4 + k_{55}u_5 + k_{56}u_6 + Q_{f5}$$

$$Q_6 = k_{61}u_1 + k_{62}u_2 + k_{63}u_3 + k_{64}u_4 + k_{65}u_5 + k_{66}u_6 + Q_{f6}$$

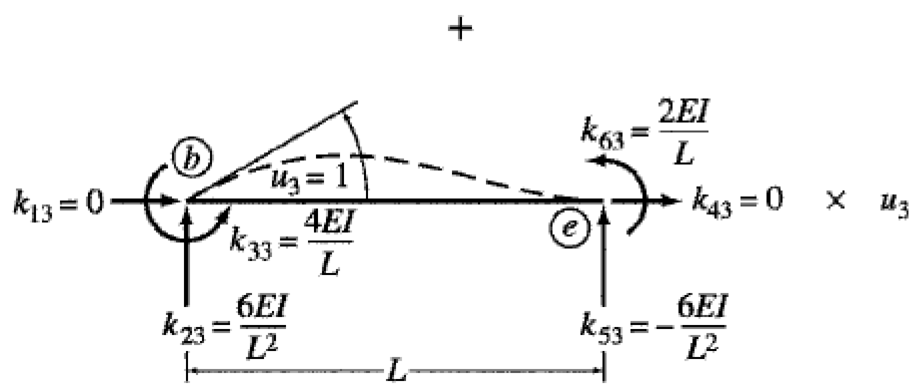
En donde k_{ij} *representa la fuerza requerida en la posición y dirección de* Q_i*, en conjunto con otras fuerzas de los extremos, para causar un valor unitario de desplazamiento* u_j *mientras todos los demás desplazamientos son cero*. Estas fuerzas por unidad de desplazamiento se conocen como *coeficientes de rigidez*. Vea que una notación de subíndice doble se emplea para los coeficientes de rigidez, el primero identificando la fuerza y el segundo el desplazamiento. El último término del lado derecho de las ecuaciones anteriores representa las fuerzas de "extremo empotrado" debidas a las cargas externas, las cuales se pueden determinar empleando las expresiones de los momentos de "empotramiento" dadas en algunas tablas y aplicando las ecuaciones de equilibrio.



(c)

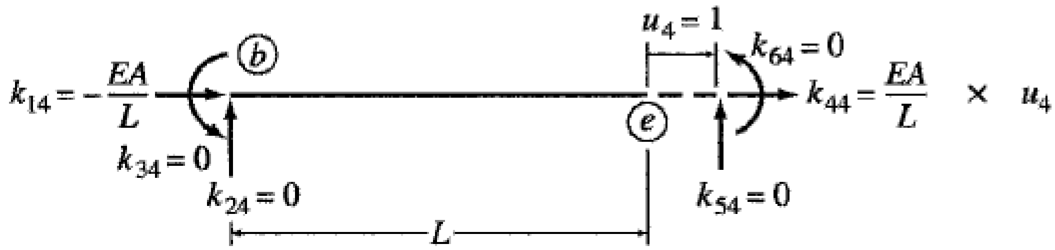


(d)



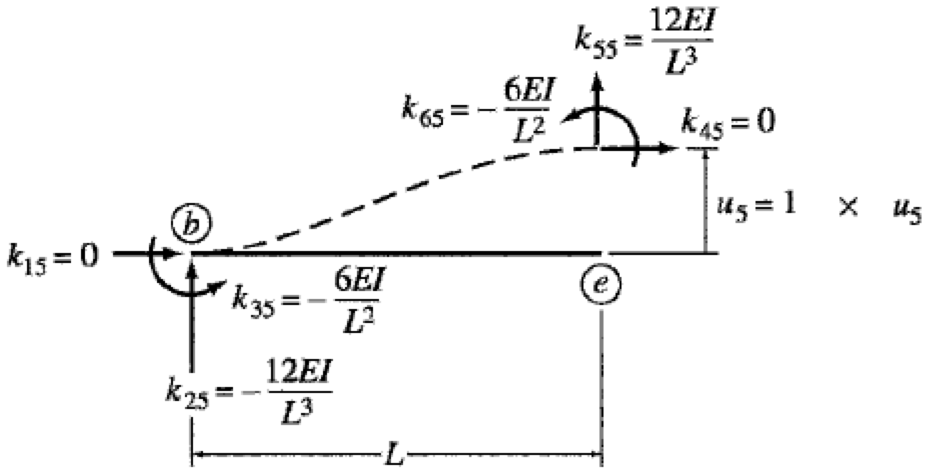
(e)

+


$k_{14} = -\frac{EA}{L}$
$k_{34} = 0$
$k_{24} = 0$
$u_4 = 1$
$k_{64} = 0$
$k_{44} = \frac{EA}{L}$
$\times \ u_4$
$k_{54} = 0$
b
e
L

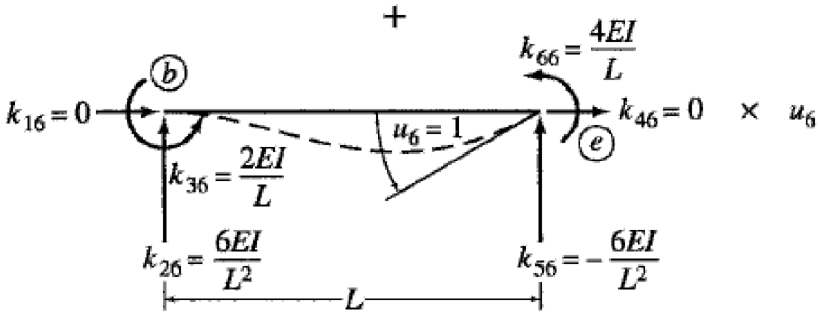
(f)

+


$k_{55} = \frac{12EI}{L^3}$
$k_{65} = -\frac{6EI}{L^2}$
$k_{45} = 0$
$u_5 = 1 \ \times \ u_5$
$k_{15} = 0$
$k_{35} = -\frac{6EI}{L^2}$
$k_{25} = -\frac{12EI}{L^3}$
b
e
L

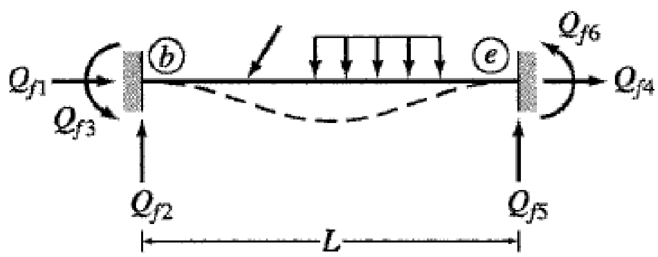
(g)

+


$k_{66} = \frac{4EI}{L}$
$k_{16} = 0$
$u_6 = 1$
$k_{46} = 0 \ \times \ u_6$
$k_{36} = \frac{2EI}{L}$
$k_{26} = \frac{6EI}{L^2}$
$k_{56} = -\frac{6EI}{L^2}$
b
e
L

(h)

+


Q_{f6}
Q_{f1}
Q_{f3}
Q_{f4}
Q_{f2}
Q_{f5}
b
e
L

(i)

Por la definición de la multiplicación matricial, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{f1} \\ Q_{f2} \\ Q_{f3} \\ Q_{f4} \\ Q_{f5} \\ Q_{f6} \end{bmatrix}$$

O simbólicamente como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q_f}$$

En donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{u}$ son respectivamente los vectores de fuerzas en los extremos de los miembros y desplazamientos, en coordenadas locales; $\mathbf{k}$ es la llamada *matriz de rigidez del miembro en coordenadas locales*, y $\mathbf{Q_f}$ es el *vector de fuerzas de empotramiento del miembro en coordenadas locales*.