ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS POR EL MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Introducción

El método de las flexibilidades, también conocido como *método de las deformaciones consistentes*, o el *método de la superposición*, es un procedimiento para analizar estructuras indeterminadas elásticas lineales.

Todos los métodos para análisis indeterminados deben satisfacer los requisitos de *equilibrio* y *compatibilidad*. Por compatibilidad nos referimos a que la estructura debe encajar junta – no debe haber brechas entre ella – y la forma deformada debe ser consistente con las restricciones impuestas por los apoyos.

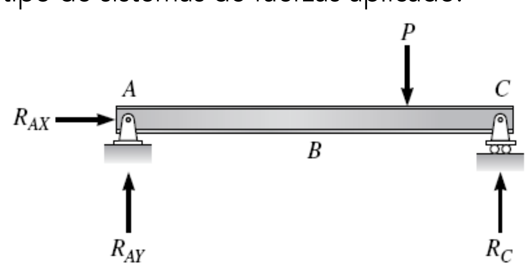
En el método de las flexibilidades, cumplimos los requisitos de equilibrio al emplear las ecuaciones de equilibrio estático en cada paso del análisis.

El requisito de compatibilidad se satisfará escribiendo una o más ecuaciones (es decir, las *ecuaciones de compatibilidad*), que indican que no existirán brechas internamente, o que las deflexiones son consistentes con los apoyos impuestos.

Como paso clave en el método de las flexibilidades, una estructura indeterminada se reemplazará por una estructura determinada estable; esta estructura – llamada la estructura *base* o *liberada* – se establece a partir de la original imaginando que se remueven temporalmente ciertas restricciones, tales como apoyos.

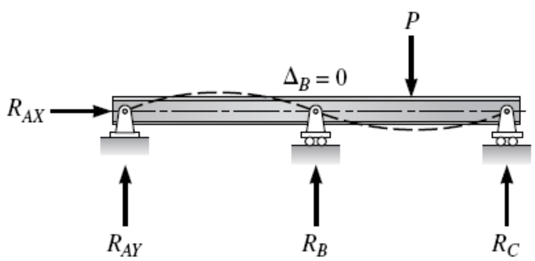
Concepto de redundante

Para conformar a una estructura estable, se precisan de al menos tres restricciones, que no sean equivalentes a un sistema de fuerzas paralelas o concurrentes. Así, se evita el desplazamiento como cuerpo rígido bajo cualquier condición de carga. Vea en la imagen, que las reacciones horizontales y verticales de la articulación en A, así como la reacción vertical en el rodillo en C, evitan tanto la traslación como la rotación de la viga, sin importar el tipo de sistemas de fuerzas aplicado.



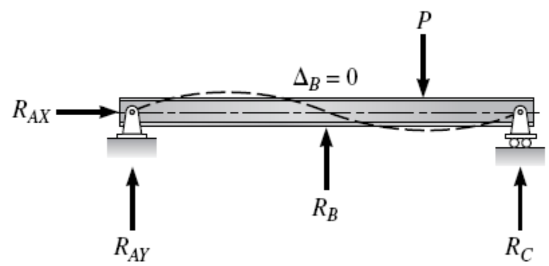
Ya que existen tres ecuaciones de equilibrio disponibles para determinar las tres reacciones, la estructura es *estáticamente determinada*.

Si un tercer apoyo se construyera en B, una reacción adicional R_B estaría disponible para apoyar a la viga. Desde el momento en que la reacción en B no es estrictamente necesaria para la estabilidad de la estructura, se denomina *redundante.*



En muchas estructuras la designación de una reacción particular como redundante, es arbitraria. Por ejemplo, la reacción en C en la figura anterior podría también lógicamente ser considerada como una redundante, debido a que la articulación en A y el rodillo en B ya son suficientes restricciones para producir a una estructura determinada estable.

Aunque la incorporación del rodillo en B produce una estructura que es indeterminada al primer grado (existen cuatro reacciones, pero sólo están disponibles tres ecuaciones de la estática), el rodillo también impone el requisito geométrico de que el desplazamiento vertical en B sea cero. Esta condición nos permite escribir una ecuación adicional, que se puede usar en conjunto de las ecuaciones de la estática para determinar la magnitud de todas las reacciones.



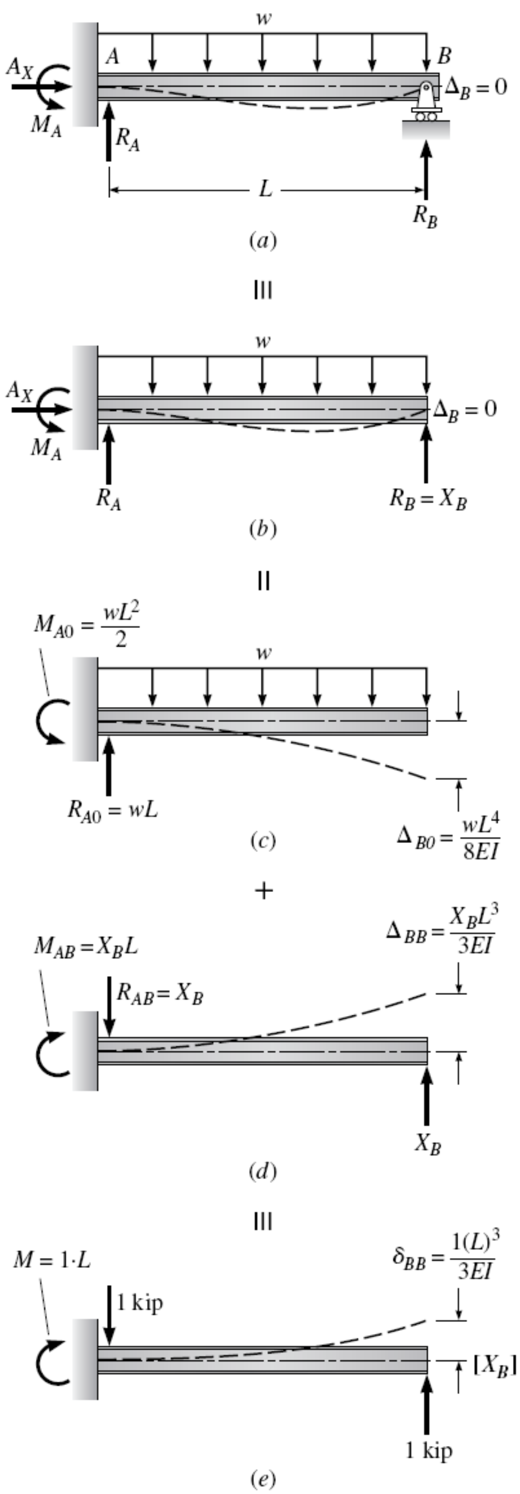
En esta imagen se muestra la estructura liberada de la viga anterior (cambia el rodillo en B por una reacción).

Fundamentos del Método de las Flexibilidades

En este método, uno se imagina que el número suficiente de redundantes (apoyos, por ejemplo) se remueven de la estructura indeterminada para producir una estructura determinada estable *liberada*.

Después, se aplican las cargas de diseño (las cargas originales), *y las redundantes*, de las cuales aún no se conoce su magnitud.

Por ejemplo, el inciso (c) de la siguiente imagen muestra a la estructura determinada liberada de la viga en el inciso (b), cuando la reacción en B se tomó como redundante. Ya que la estructura liberada en el inciso (c) está cargada igualmente que la estructura original, las fuerzas internas y deformaciones en la estructura liberada son idénticas a aquéllas de la estructura original indeterminada.



Después analizamos la estructura determinada liberada para las cargas aplicadas y las redundantes. En este paso, el análisis se divide en dos casos separados: (1) para las cargas reales aplicadas y (2) para cada redundante desconocida. Para cada caso, las deflexiones se calculan en cada punto donde actúe una redundante.

Como se asume que la estructura se comporta elásticamente, se entiende que estos análisis individuales se pueden combinar – o superponer – para producir un análisis que incluya los efectos de todas las fuerzas y redundantes.

Para resolver para las redundantes, las deflexiones se suman en cada punto donde actúa una redundante y se igualan al valor conocido de la deflexión. Por ejemplo, si la redundante está siendo proporcionada por un rodillo, la deflexión será cero en la dirección normal al plano a lo largo del cual se mueve el rodillo. Este procedimiento produce un conjunto de *ecuaciones de compatibilidad* iguales en número a las redundantes.

Una vez que se determinan los valores de las redundantes, el balance de la estructura se puede analizar con las ecuaciones de la estática.

Para ilustrar el procedimiento anterior, consideremos el análisis de la viga a mano izquierda. Ya que sólo existen tres ecuaciones de la estática disponibles para resolver para las cuatro restricciones suministradas por el empotramiento y el rodillo, la estructura es indeterminada y de primer grado. Para encontrar las reacciones, se necesita una ecuación adicional (para complementar a las tres de la estática). Para formular esta ecuación, escogimos arbitrariamente a la reacción R_B como redundante. En el inciso (b) se redibujó la viga mostrando la reacción R_B ejercida por el rodillo, pero ya no el rodillo. Al imaginar que se ha eliminado el rodillo, podemos tratar a la viga indeterminada como una viga simple en voladizo, que toma una carga uniformemente distribuida w y una fuerza desconocida R_{B} en su extremo libre.

Adoptando este punto de vista, originamos una estructura determinada que se podía analizar por la estática. Desde el momento en que las vigas de los incisos (a) y (b) cargan exactamente las mismas solicitaciones, sus curvas de corte y momento son idénticas y ambas se deforman de la misma manera. En particular, la deflexión vertical Δ_B en el apoyo B equivale a cero. Para enfatizar el hecho de que la reacción proporcionada por el rodillo es la redundante, cambiamos R_B por el símbolo X_B.

Luego dividimos el análisis de la viga en voladizo en dos partes (incisos c y d). El inciso (c) muestra las reacciones y las deflexiones en B, Δ_{B0}, producidas por la carga uniforme cuya magnitud está dada.

Las deflexiones de la estructura *liberada* producidas por las cargas aplicadas se definirán por medio de dos subíndices; el primero indicará la localización de la deflexión; el segundo será cero para distinguir a la estructura liberada de la original.

El inciso (d) muestra las reacciones y las deflexiones en B, Δ_{BB}, producidas por la redundante X_{B}, cuya magnitud es desconocida. Asumiendo que la estructura se comporta elásticamente, podemos sumar (superponer) los dos casos en los incisos (c) y (d) para regresar al caso original mostrado en (a) o en (b).

Ya que el rodillo en la estructura original ocasiona el requisito geométrico de que el desplazamiento vertical en B valga cero, la suma algebraica de los desplazamientos verticales en B en los incisos (c) y (d) deberá ser igual a cero. Esta condición de geometría o compatibilidad se puede expresar como:

$$\Delta_B = 0$$

Superponiendo las deflexiones en el punto B producidas por las cargas aplicadas en el inciso (c), y la redundante del inciso (d), podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\Delta_{B0} + \Delta_{BB} = 0$$

Las deflexiones se pueden evaluar por el método de área momento o el trabajo virtual.

Como convención de signos, asumiremos que los desplazamientos son positivos cuando estén en la dirección de la redundante. De tal forma, obtenemos:

$$-\frac{wl^4}{8EI} + \frac{X_B L^3}{3EI} = 0$$

Despejando para X_B se obtiene:

$$X_B = \frac{3wL}{8}$$

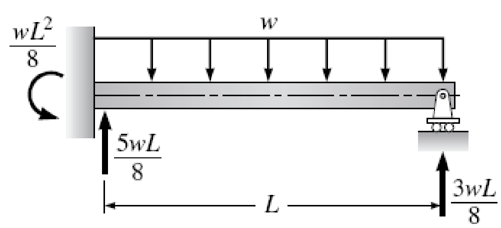
Después de que se calcula X_B se puede aplicar en el inciso (a), y determinar las reacciones en A por la estática; o como procedimiento alternativo, las reacciones se pueden calcular sumando las componentes correspondientes de las reacciones en los incisos (c) y (d). Por ejemplo, la reacción vertical en el apoyo A vale:

$$R_A = wL - X_B = wL - \frac{3wL}{8} = \frac{5wL}{8}$$

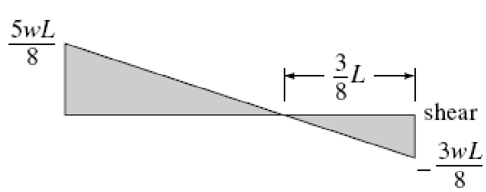
Similarmente, el momento en A es igual a:

$$M_A = \frac{wL^2}{2} - X_B L = \frac{wL^2}{2} - \frac{3wL(L)}{8} = \frac{wL^2}{8}$$

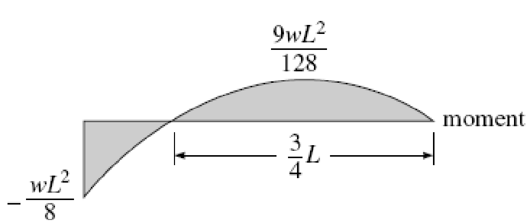
Ya que se conocen las reacciones, se pueden dibujar los diagramas de corte y de momento.



(a)



(b)



(c)

En el análisis precedente, la ecuación de compatibilidad se expresó en términos de las dos deflexiones Δ_{B0} y Δ_{BB}. Al configurar las ecuaciones de compatibilidad para estructuras que son indeterminadas a más de un grado, es deseable señalar a las redundantes como incógnitas. Para escribir las ecuaciones de compatibilidad en esta manera, podemos aplicar un valor unitario de la redundante (1 kip en este caso) en el punto B, y luego multiplicar este caso por X_B, es decir, la *magnitud real* de la redundante. Para indicar que la carga unitaria (así como todas las fuerzas y los desplazamientos que produce) es multiplicada por la redundante, mostramos a la redundante en paréntesis rectos justo al lado de la carga unitaria en el diagrama del miembro (inciso e).

La deflexión δ_{BB} producida por el valor unitario de la redundante se llama *coeficiente de flexibilidad*. Ya que las vigas en los incisos (d) y (e) son equivalentes se puede decir que:

$$\Delta_{BB} = X_B \delta_{BB}$$

Pero $\Delta_{B0} + \Delta_{BB} = 0$:

$$\Delta_{B0} + X_B \delta_{BB} = 0$$

Y:

$$X_B = -\frac{\Delta_{B0}}{\delta_{BB}}$$

Aplicando la ecuación anterior, calculamos X_B como:

$$X_B = -\frac{\Delta_{B0}}{\delta_{BB}} = -\frac{-\frac{wL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3wL}{8}$$

Después de que se determina X_B, las reacciones o fuerzas internas en cualquier punto de la viga original se pueden determinar combinando las fuerzas correspondientes en el inciso (c) con aquéllas del inciso (e) multiplicadas por X_B, por ejemplo, M_A, el momento en el apoyo empotrado es igual a:

$$M_A = \frac{wL^2}{2} - (1L)X_B = \frac{wL^2}{2} - L\left(\frac{3wL}{8}\right) = \frac{wL^2}{8}$$