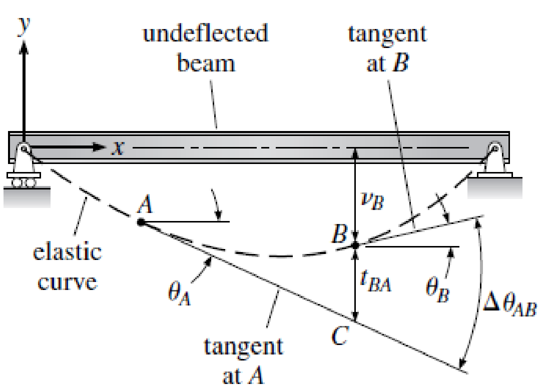
# Deflexiones de vigas y marcos

Como vimos en el método de la doble integración, los puntos a lo largo de la curva elástica de una viga o marco están en función del momento flexionante $M$, el momento de inercia $I$, y el módulo elástico $E$. En el método de área-momento estableceremos un procedimiento que utiliza el área de los diagramas de momento (de hecho, los diagramas $M/EI$) para evaluar la pendiente o la deflexión en puntos selectos a lo largo del eje de una viga o marco.

Este método necesita un esbozo preciso de la geometría deformada y emplea dos teoremas. Uno sirve para calcular el *cambio* en la pendiente entre dos puntos de la curva elástica. El otro se emplea para calcular la distancia vertical entre un punto en la curva elástica y una línea tangente a la curva elástica en un segundo punto (denominada desviación tangencial).

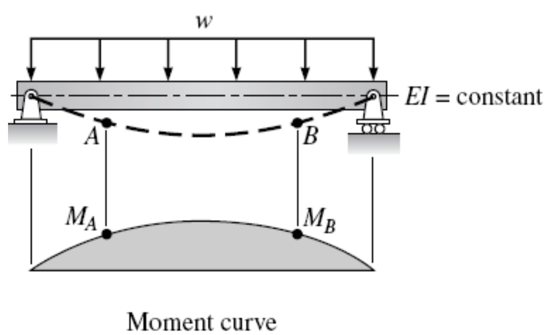



En los puntos $A$ y $B$ se dibujan líneas tangentes a la curva elástica. Esas líneas tienen una pendiente $\theta_A$ y $\theta_B$ con respecto al eje horizontal.

Para el sistema mostrado en la figura anterior, la pendiente en $A$ es negativa y la pendiente en $B$ es positiva. El cambio de pendiente entre los puntos $A$ y $B$ se representa por $\Delta\theta_{AB}$.

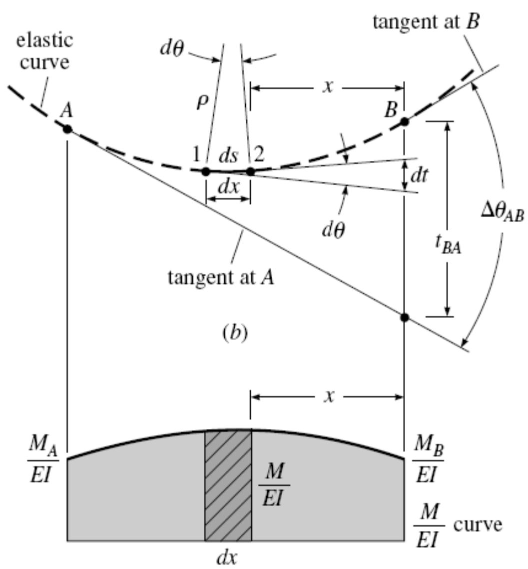
La desviación tangencial en el punto $B$ – la distancia vertical entre el punto $B$ en la curva elástica y el punto $C$ dibujado en la línea tangente a la curva elástica en $A$ – se denomina $t_{BA}$. Emplearemos dos subíndices para etiquetar todas las desviaciones tangenciales: el primero indica la posición de la desviación tangencial, y el segundo especifica el punto en el cuál se dibujó la línea tangente. Como se vio en la figura, $t_{BA}$ *no* es la deflexión en el punto $B$, más bien $v_B$ lo es.

## Derivación de los Teoremas de Área – Momento




En la figura anterior se muestran los puntos $A$ y $B$ de una viga cargada, su curva elástica y su diagrama de momentos.

En la página siguiente aparece la porción $AB$ de la curva elástica de esa misma viga. En los puntos $A$ y $B$ se dibujan líneas tangentes a la curva elástica.




El ángulo total entre las dos tangentes se nombrará $\Delta\theta_{AB}$, y éste se expresará en términos de las propiedades de la sección transversal y el momento producido por las cargas aplicadas.

Para lograr lo anterior, consideraremos que el aumento del cambio de ángulo $d\theta$ ocurre a lo largo de la longitud $ds$ del segmento infinitesimal localizado a una distancia $x$ a la izquierda del punto $B$.

Anteriormente habíamos dicho que la curvatura en un punto de la curva elástica se puede expresar como:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Donde $E$ es el módulo de elasticidad e $I$ es el momento de inercia. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por $dx$, se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

Para formular el cambio de ángulo total $\Delta\theta_{AB}$, debemos sumar todos los incrementos $d\theta$ para cada segmento de longitud $ds$ entre los puntos $A$ y $B$ por medio de una integral:

$$\Delta\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}dx$$

Podemos evaluar la cantidad $\frac{M}{EI}dx$ de la integral de manera gráfica, al dividir las ordenadas del diagrama de momentos por $EI$, para producir la curva $M/EI$. Si $EI$ es constante a lo largo del eje de la viga (el caso más común), la curva $M/EI$ tendrá la misma forma que el diagrama de momentos.

Dándose cuenta de que la cantidad $\frac{M}{EI}dx$ representa un área infinitesimal de altura $M/EI$ y longitud $dx$, podemos interpretar la última integral como el área bajo el diagrama $M/EI$ entre los puntos $A$ y $B$. Esta relación constituye el primer principio de área-momento:

**"El cambio en la pendiente entre dos puntos cualesquiera de una curva elástica continua es igual al área debajo de la curva $M/EI$ entre esos dos puntos."**

Este teorema sólo aplica para el caso donde la curva elástica es *continua* y de variación *suave* entre los dos puntos.

Para establecer el segundo teorema – el que nos permite evaluar la desviación tangencial –, primero deberemos sumar todos los incrementos infinitesimales de longitud $dt$ que conforman a la desviación tangencial $t_{BA}$ total.

La magnitud de un incremento típico $dt$, al contribuir a la desviación tangencial $t_{BA}$ por la curvatura de un segmento típico $ds$ entre los puntos 1 y 2 en la curva elástica, se puede expresar en término del ángulo entre las líneas tangentes a los extremos del segmento, y a una distancia $x$ entre el segmento y el punto $B$, como:

$$dt = d\theta\ x$$

Expresando $d\theta$ como $\frac{M}{EI}dx$ en la ecuación anterior,

$$dt = \frac{M}{EI}dx\ (x)$$

Para evaluar $t_{BA}$ debemos sumar todos los incrementos de $dt$ integrando la contribución de todos los segmentos infinitesimales entre los puntos $A$ y $B$:

$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_a^B \frac{Mx}{EI}dx$$

Si recordamos que la cantidad $Mdx/EI$ representa al área infinitesimal debajo del diagrama $M/EI$, y que $x$ es la distancia desde esa área hasta el punto $B$, se puede interpretar la última integral como el momento alrededor del punto $B$ del área bajo el diagrama $M/EI$ entre los puntos $A$ y $B$. Esto constituye el segundo teorema de área-momento:

"**La desviación tangencial en un punto $B$ en una curva elástica continua y suave a partir de una línea tangente dibujada a la curva elástica en un segundo punto $A$ es igual al momento respecto a $B$ del área bajo la curva $M/EI$ entre esos dos puntos.**"

## Aplicación del Teorema de Área-Momento

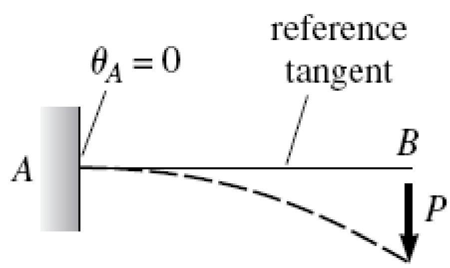
El primer paso para calcular la pendiente o la deflexión de un punto en la curva elástica es el dibujar un esbozo preciso de la configuración deformada. La curvatura de la curva elástica debe ser consistente con la curva de momentos, y los extremos de los miembros deben satisfacer las restricciones impuestas por los apoyos. El siguiente paso es encontrar un punto de la curva elástica donde se conozca la pendiente de alguna tangente. Después de que se establece esta tangente de referencia, la pendiente o la deflexión en cualquier otro punto de la curva elástica se puede encontrar fácilmente empleando los teoremas de área-momento.

### Caso 1

Voladizo. En un voladizo, la línea tangente de pendiente conocida se puede dibujar en la curva elástica en la posición del extremo fijo (la pendiente de la curva elástica en $A$ es cero, ya que el apoyo fijo previene que el extremo del miembro rote). La pendiente en un segundo punto $B$ en la curva elástica se puede calcular sumando algebraicamente a la pendiente en $A$ el cambio de pendiente $\Delta\theta_{AB}$ entre los dos puntos. Esta relación se puede formular como:

$$\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{AB}$$

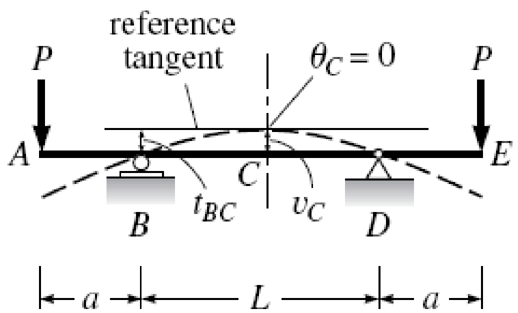
Donde $\theta_A$ es la pendiente en el extremo fijo (es decir $\theta_A = 0$), y $\Delta\theta_{AB}$ es igual al área bajo el diagrama $M/EI$ entre los puntos $A$ y $B$.

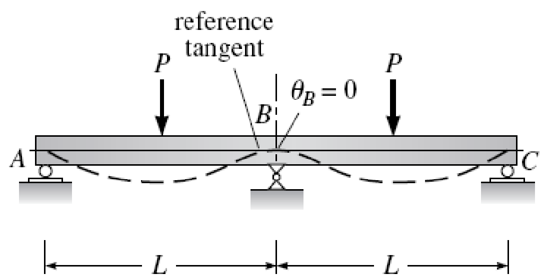



Ya que la tangente de referencia es horizontal, las desviaciones tangenciales (las distancias verticales entre la línea tangente y la curva elástica) son, de hecho, desplazamientos.

### Caso 2

A continuación se presentan ejemplos de estructuras simétricas cargadas simétricamente, con respecto al eje vertical de simetría al centro de la estructura.




Debido a la simetría, la pendiente de la curva elástica es cero en el punto donde el eje de simetría intersecta a la curva elástica. En este punto, la tangente a la curva elástica es horizontal. De tal forma, para las dos vigas anteriores, se puede concluir que la pendiente en cualquier punto de la curva elástica equivale al área debajo de la curva $M/EI$ entre ese punto y el eje de simetría.

Cuando la viga tiene un número par de claros, el cálculo de las deflexiones se realiza de manera similar al caso del voladizo. En el punto de la tangencia (punto $B$), tanto la deflexión como la pendiente en la curva elástica son iguales a cero. Ya que la tangente a la curva elástica es horizontal, las deflexiones en cualquier otro punto son iguales a las desviaciones tangenciales desde la línea tangente dibujada, hasta la curva elástica en al apoyo $B$.

Cuando una estructura simétrica está conformada por un número impar de claros, el procedimiento anterior se debe modificar ligeramente. Por ejemplo, para la viga de tres claros mostrada en la columna izquierda, observamos que la tangente a la curva elástica es horizontal en el eje de simetría. El cálculo de las pendientes de nuevo se referenciará desde el punto de tangencia en $C$. Sin embargo, la línea central de la viga se ha desplazado una distancia hacia arriba $v_c$; por lo tanto, las desviaciones tangenciales desde las tangentes de referencia usualmente no son deflexiones.

Podemos calcular $v_c$ al darnos cuenta que la distancia vertical entre la línea tangente y la curva elástica en cualquier apoyo, $B$, o $C$ es una desviación tangencial que equivale a $v_c$. En la figura, $t_{BC} = v_c$. Después de que se calcula $v_c$ la deflexión en cualquier otro punto que se encuentre sobre la posición original del miembro sin cargar equivale a $v_c$ menos la desviación tangencial del punto desde la tangencia de referencia. Si un punto se encuentra debajo de la posición sin deformar de la viga (por ejemplo, los extremos de los voladizos en $A$ o en $E$), la deflexión será igual a la desviación tangencial del punto menos $v_c$.