

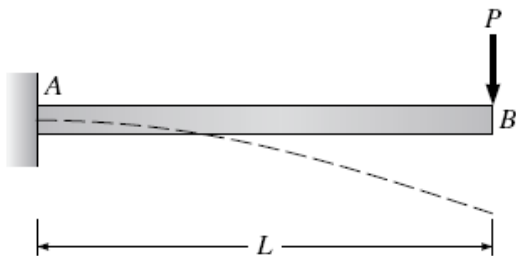
## Deflexiones de vigas y marcos

El método de la viga conjugada permite calcular las pendientes y deflexiones de vigas con diferentes tipos de apoyos y condiciones de frontera al reemplazar los apoyos reales con apoyos *conjugados* para producir vigas conjugadas.

El efecto de los apoyos ficticios es imponer condiciones de frontera que garanticen que el cortante y el momento, producidos en una viga cargada por el diagrama  $M/EI$ , sean iguales a la pendiente y a la deflexión, respectivamente, de la viga real.

### Explicación del método

Consideremos las relaciones entre el corte y el momento (producidos por las cargas elásticas) y la forma deflexionada de una viga en voladizo.



La curva  $M/EI$  asociada con la carga concentrada  $P$  actuando en la estructura real, nos señala la curvatura en todos los puntos a lo largo del eje de la viga:

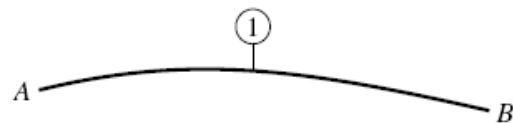


(Diagrama de curvaturas  $M/EI$ )

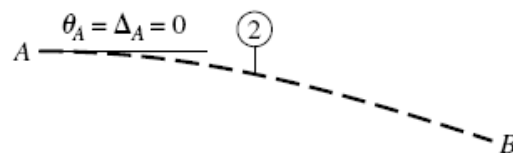
Por ejemplo, en  $B$ , donde el momento vale cero, la curvatura (ver diagrama de

curvaturas), vale cero (**curvaturas**, no rotaciones ni deflexiones).

Por el contrario, en  $A$ , la curvatura es mayor que en  $B$ , y es igual a  $-PL/EI$ . Ya que la curvatura es negativa en todas las secciones a lo largo del eje del miembro, la viga se dobla cóncava hacia abajo a través de la totalidad de su longitud.



Desafortunadamente, aunque la deformada dada por la curva anterior es *consistente* con el diagrama de curvaturas, reconocemos que *no* representa la deformada correcta de la viga en voladizo porque la pendiente a la izquierda no es consistente con las condiciones de frontera impuestas por el apoyo fijo  $A$ ; es decir, la pendiente (y la deflexión) en  $A$  deben ser cero, como se muestra en la curva siguiente:



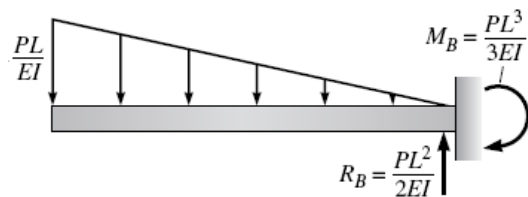
Por lo tanto, podemos razonar que si la pendiente y la deflexión en  $A$  deben ser cero, los valores del *cortante elástico* y el *momento elástico* deben ser iguales a cero. Ya que la única condición de frontera que satisface este requisito es un extremo libre, debemos remover imaginariamente el apoyo en  $A$  (si no hay apoyo, no se pueden desarrollar reacciones). Al establecer la pendiente y

Análisis Estructural – Deflexiones  
Diego Cavazos de Lira

la deflexión correcta en el extremo del miembro, garantizamos que el miembro esté orientado correctamente.

Por el contrario, ya que la pendiente y la deflexión *pueden* existir en el extremo libre del voladizo real, un apoyo que sea capaz de resistir corte y momento se debe proporcionar en *B*. Por lo tanto, en la viga conjugada, debemos imponer un apoyo fijo imaginario en *B*.

La viga conjugada, cargada con el diagrama  $M/EI$  queda:



Las reacciones en *B* en la viga conjugada producidas por la carga elástica (el diagrama  $M/EI$ ) nos dan la pendiente y la deflexión en la viga real.

La figura de la columna derecha muestra los apoyos conjugados que corresponden a una variedad de apoyos estándar.

Dos apoyos que no han sido discutidos previamente (el rodillo interior, y la articulación) (incisos d y e) se muestran también. Ya que un rodillo *real* interior (inciso d) proporciona restricción vertical solamente, la deflexión en el rodillo es cero, pero el miembro es libre de rotar. Ya que el miembro es continuo, la pendiente es la misma en cada lado de la unión. Para satisfacer los requisitos geométricos, el apoyo *conjugado* no debe presentar capacidad para momento (pero deflexión cero), y debe permitir que los cortantes que existan en cada lado del apoyo sean iguales, de ahí la articulación.

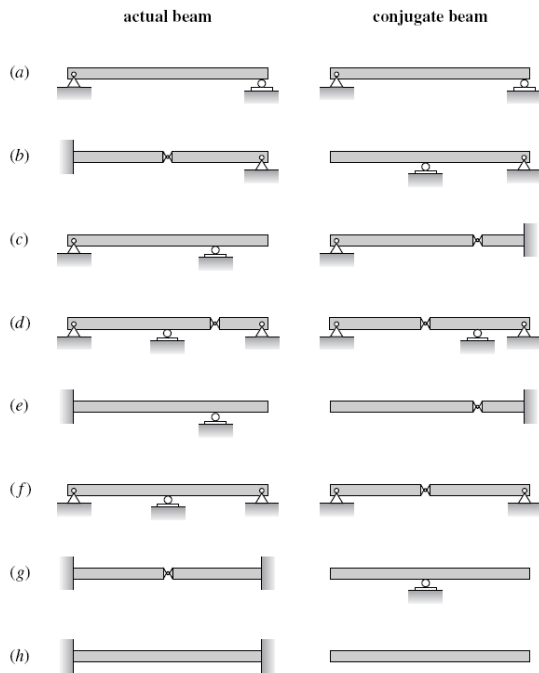
	Real Support	Conjugate Support
(a)	<p>Pin or roller <math>\Delta = 0</math> <math>\theta \neq 0</math></p>	<p>Pin or roller <math>M = 0</math> <math>V \neq 0</math></p>
(b)	<p>Free end <math>\Delta \neq 0</math> <math>\theta \neq 0</math></p>	<p>Fixed end <math>M \neq 0</math> <math>V \neq 0</math></p>
(c)	<p>Fixed end <math>\Delta = 0</math> <math>\theta = 0</math></p>	<p>Free end <math>M = 0</math> <math>V = 0</math></p>
(d)	<p>Interior support <math>\Delta = 0</math> <math>\theta_L = \theta_R \neq 0</math></p>	<p>Hinge <math>M = 0</math> <math>V_L = V_R \neq 0</math></p>
(e)	<p>Hinge <math>\Delta \neq 0</math> <math>\theta_L</math> and <math>\theta_R</math> may have different values</p>	<p>Interior roller <math>M \neq 0</math> <math>V_L</math> and <math>V_R</math> may have different values</p>

Ya que la articulación no proporciona ninguna restricción contra las deflexiones o rotaciones en la estructura real (inciso e), el apoyo conjugado debe permitir que se desarrollen el momento, y diferentes valores de cortante en cada lado de la junta. Estas condiciones se proporcionan al emplear un rodillo interior en la estructura conjugada. El momento se puede desarrollar porque la viga es continua a través del apoyo, y el cortante obviamente puede tener distintos valores en cada lado del rodillo.

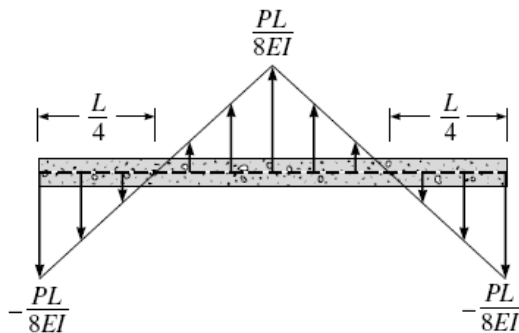
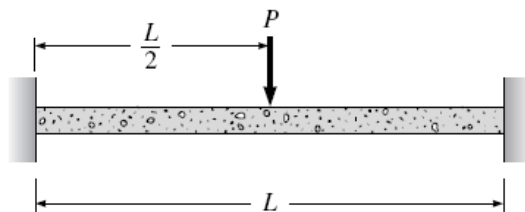
La siguiente figura muestra estructuras conjugadas que corresponden a ocho ejemplos de estructuras reales. Si las estructuras reales son indeterminadas, la estructura conjugada será inestable,

Análisis Estructural – Deflexiones  
Diego Cavazos de Lira

pero no hay de qué preocuparse ya que el diagrama  $M/EI$  producido por las fuerzas que actúan en la estructura real, producirá cargas elásticas que mantendrán a la estructura en equilibrio.



Por ejemplo:



La estructura conjugada anterior (cargada por el diagrama  $M/EI$  de una

viga doblemente empotrada) ni siquiera tiene apoyos. Sin embargo, al aplicar las ecuaciones en la totalidad de la estructura, podemos verificar que la estructura conjugada se encuentra en equilibrio con respecto a tanto la sumatoria de fuerzas en la dirección vertical como a la sumatoria de momentos respecto a cualquier punto.

A manera de resumen, para calcular las deflexiones en cualquier tipo de viga por medio del método de la viga conjugada, procedemos como se enuncia a continuación:

1. Se establece la curva de momentos de la estructura real.
2. Se traza la curva  $M/EI$  al dividir todas las ordenadas por  $EI$ . Se deben tomar en cuenta las variaciones de  $E$  o  $I$  en este paso.
3. Establezca la viga conjugada reemplazando los apoyos reales o articulaciones con los correspondientes apoyos conjugados.
4. Aplique el diagrama  $M/EI$  a la estructura conjugada como su carga, y calcule el cortante y el momento en aquellos puntos que desee conocer la pendiente o la deflexión.