Deflexiones de vigas y marcos

Cuando se carga una estructura, sus elementos esforzados se deforman. Cuando esto ocurre, la estructura cambia de forma y sus puntos se desplazan. Aunque estas deflexiones son pequeñas, el ingeniero se debe asegurar que estas deflexiones estén dentro de los límites especificados por los códigos para garantizar que estén dentro de los límites de servicio.

Grandes deflexiones pueden ocasionar el agrietamiento de componentes no estructurales; destaca el desplazamiento lateral de los edificios por la fuerza del viento, el cual puede agrietar muros y quebrar ventanas.

La magnitud de las deflexiones es una medida de la rigidez de los miembros.

Su cálculo es útil para analizar estructuras indeterminadas, obtener las cargas de pandeo, y determinar los periodos naturales de vibración de los miembros.

En esta sección veremos varios métodos para calcular las deflexiones y las pendientes de los puntos a lo largo de vigas y marcos. Estos métodos se basan en la ecuación diferencial de la curva elástica de una viga. Esta ecuación relaciona la curvatura de un punto a lo largo del eje longitudinal de una viga con el momento flexionante en ese punto, y también con las propiedades de la sección transversal del material.

Método de la Doble Integración

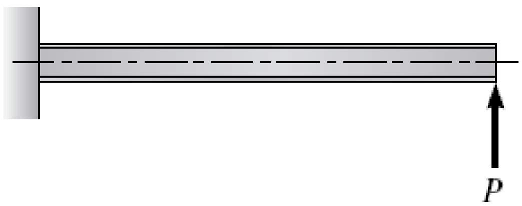
El método de la doble integración es un procedimiento que encuentra las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de los puntos a lo largo del eje longitudinal de una viga cargada (la curva elástica). La ecuación se encuentra integrando la ecuación diferencial de la curva elástica dos veces, de ahí el nombre de *doble integración*. Este método asume que todas las deformaciones son producidas por el momento. Las deformaciones por cortante – que típicamente son menores al 1% de las deformaciones a flexión en vigas de proporciones comunes, no son usualmente incluidas. Pero si las vigas son de gran peralte, tienen almas delgadas, o están construidas de un material de bajo módulo de rigidez (como la madera contrachapada), la magnitud de las deformaciones por cortante puede ser importante, y se debe investigar.

Primero revisaremos la geometría de las curvas y luego derivaremos la ecuación diferencial de la curva elástica (ecuación que relaciona la curvatura en un punto de la curva elástica con el momento y la rigidez a flexión de la sección transversal). Finalmente integraremos las ecuaciones diferenciales de la curva elástica dos veces y evaluaremos las constantes de integración al considerar las condiciones de frontera impuestas por los apoyos.

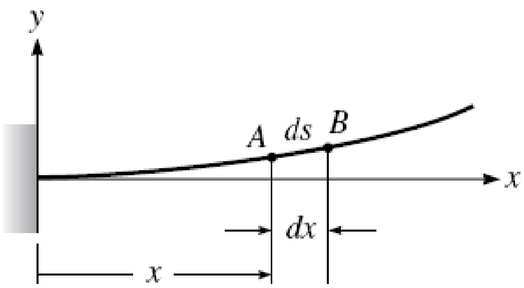
La primera integración encuentra la ecuación de la pendiente; la segunda, encuentra la ecuación de la deflexión.

Geometría de Curvas Poco Profundas

Para formular las relaciones geométricas necesarias para derivar la ecuación diferencial de la curva elástica, consideremos las deformaciones de la siguiente viga en voladizo:



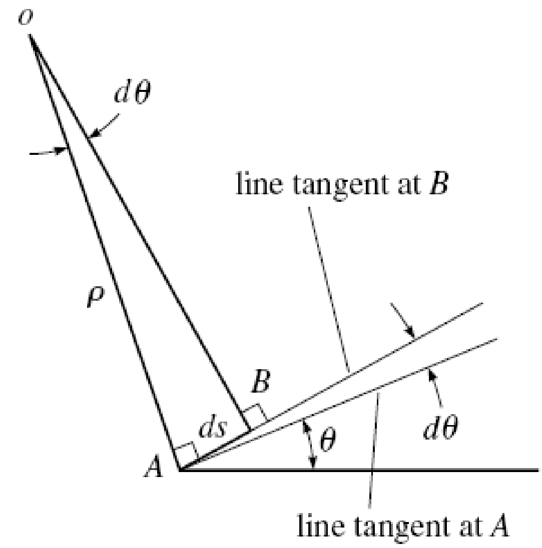
La forma deflexionada es la siguiente:



En la figura anterior se presenta la posición desplazada del eje longitudinal de la viga (curva elástica). Como eje de referencia establecimos un sistema coordenado X-Y cuyo origen se encuentra en el extremo fijo. Por claridad, los desplazamientos verticales están exagerados drásticamente. Las pendientes son muy pequeñas (del orden de décimas de grado). Si dibujáramos a escala, la viga se vería prácticamente horizontal.

Para establecer la geometría de un elemento curvo, consideremos un elemento infinitesimal de longitud ds localizado a una distancia x a partir del extremo fijo.

Como se ve en la siguiente figura, denotaremos el radio del segmento curvo mediante la letra ρ. En los puntos A y B dibujamos líneas tangentes a la curva deformada. El ángulo infinitesimal entre estas tangentes será $d\theta$. Ya que las tangentes a la curva son perpendiculares a los radios en los puntos A y B, se puede decir que el ángulo entre los radios también es $d\theta$.



La pendiente de la curva en el punto A es igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

Si los ángulos son pequeños,

$$\tan\theta \approx \theta$$

Y la pendiente se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

De la geometría del segmento triangular ABo se puede expresar:

$$\rho\ d\theta = ds$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por ds, y arreglando los términos, queda:

$$\psi = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Donde la derivada $d\theta/ds$ representa el cambio en la pendiente por unidad de longitud de distancia a lo largo de la curva, y se conoce como *curvatura*, y se representa por el símbolo ψ.

Ya que en las vigas reales las pendientes son muy pequeñas, $ds \approx dx$, y expresamos la curvatura como:

$$\psi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

Diferenciando ambos lados de $\frac{dy}{dx} = \theta$ con respecto a x, tenemos:

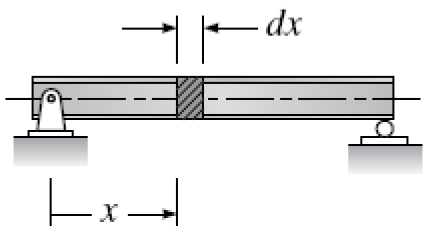
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

Y podemos expresar la curvatura $d\theta/dx$ en términos de las coordenadas rectangulares como:

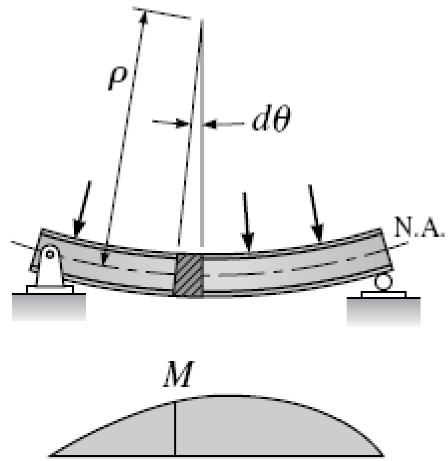
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ecuación Diferencial de la Curva Elástica

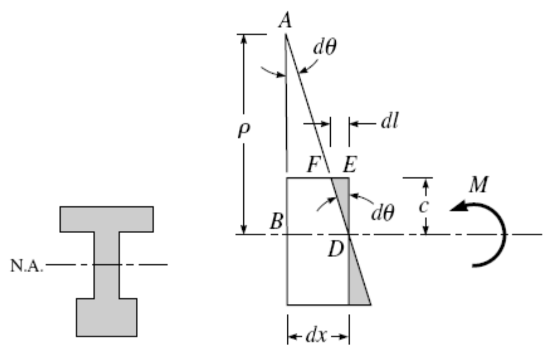
Para expresar la curvatura de una viga en un punto en particular, en términos del momento actuante en ese punto, y las propiedades de la sección transversal, consideremos las deformaciones a flexión del pequeño segmento de viga – de longitud dx – mostrado en la figura:



Las dos líneas verticales representan los lados del elemento, que son perpendiculares al eje longitudinal de la viga descargada. Conforme se aplique la carga, se crearán momentos, y la viga se flexionará.



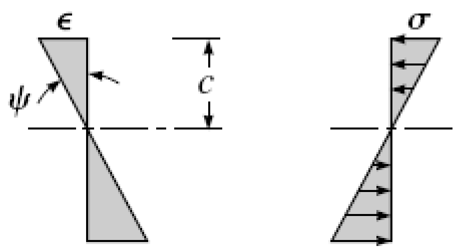
El elemento diferencial – originalmente rectangular – se deformará en un trapezoide, así como sus lados (que **permanecen rectos**) rotan utilizando al eje neutro como punto base de la rotación. Este eje neutro pasa por el centroide de la sección.



En la figura anterior, el elemento deformado se superpone con el elemento original sin esforzar, de longitud dx. Los lados izquierdos permanecen alineados, así que las deformaciones se muestran a la derecha. Vea que las fibras longitudinales del segmento ubicadas sobre el eje neutro se acortan ya que están esforzadas en compresión. Debajo del eje neutro, las fibras longitudinales se alargan, ya que están esforzadas a tensión.

Ya que el cambio de longitud en las fibras longitudinales a la altura del eje neutro es cero (deformaciones a flexión), las deformaciones y esfuerzos en ese nivel valen cero.

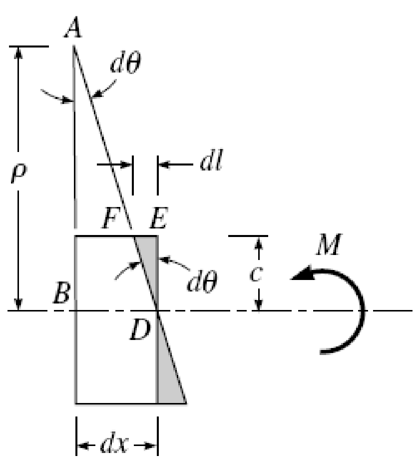
La variación de la deformación longitudinal (y de los esfuerzos) en función del peralte es la siguiente:



Ya que la deformación es igual a la deformación longitudinal dividida por la longitud original, también varía linealmente con la distancia a partir del eje neutro.

$$\epsilon = \frac{dl}{dx}$$

Retomando esta figura,



Considere el triángulo DFE. Se puede expresar el cambio de longitud en la fibra superior, dl, en función de $d\theta$ y la distancia c a partir del eje neutro hasta la fibra superior como:

$$dl = d\theta\ c$$

Por definición, la deformación unitaria, ϵ en la parte superior se puede expresar como:

$$\epsilon = \frac{dl}{dx}$$

Combinando con la anterior ecuación,

$$\epsilon = \frac{d\theta}{dx} c$$

Pero habíamos dicho que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Entonces, se puede expresar lo siguiente:

$$\frac{\epsilon}{c} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Si el comportamiento es elástico, el esfuerzo a flexión, σ, se puede relacionar con la deformación unitaria en la fibra superior por medio de la Ley de Hooke, que establece que:

$$\sigma = E\epsilon$$

Donde E es el módulo elástico. Resolviendo para ϵ,

$$\epsilon = \sigma/E$$

Combinando con la ecuación resaltada en color amarillo, eliminando ϵ,

$$\frac{\sigma}{Ec} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Cuando existe el comportamiento elástico, la relación entre el esfuerzo a flexión en la fibra superior y el momento actuante en la sección transversal, se da por:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

Sustituyendo, se obtiene la ecuación diferencial básica de la curva elástica:

$$\frac{Mc}{EcI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

En los ejemplos se empleará la ecuación enmarcada anterior para establecer las ecuaciones de la pendiente y de la deflexión de la curva elástica de una viga. Esta operación se lleva a cabo expresando el momento flexionante en términos de la carga aplicada y la distancia x a lo largo del eje de la viga, sustituyendo la ecuación de momento en la ecuación enmarcada anterior, e integrando dos veces.

Este método es el más fácil de aplicar cuando las condiciones de carga y apoyos permiten que el momento se exprese por medio de una única ecuación que sea válida a lo largo de la totalidad de la longitud del miembro.

Para vigas de sección transversal constante, E e I son constantes a lo largo de la longitud del miembro. Si E o I varían, esto también se deberá expresar como una función de x para llevar a cabo la integración. Si las cargas o la sección transversal varían en una manera complicada a lo largo del eje del miembro, podría resultar difícil integrar la ecuación de momento o inercia. En esta situación, se pueden emplear procedimientos aproximados para facilitar la solución.