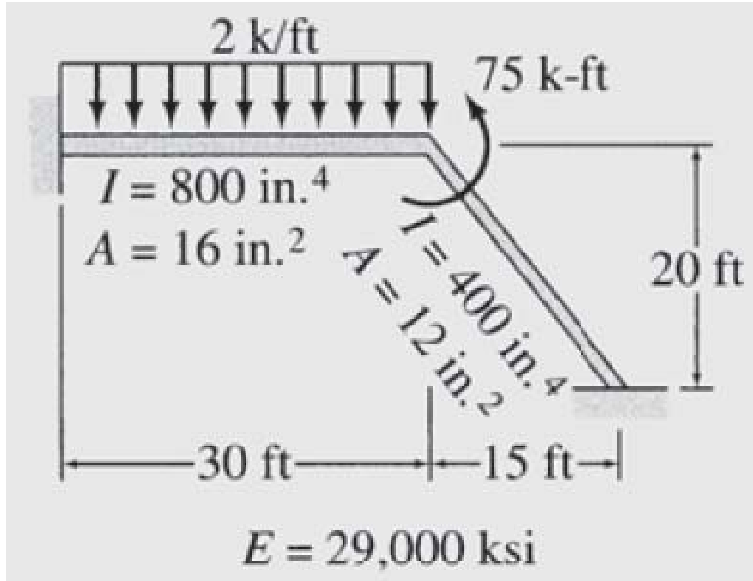
Ejemplo 18.3 del libro Structural Analysis de Kassimali

Información del modelo:



$$x := \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 45 & 30 \end{bmatrix} \; ft \qquad y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} \; ft$$

$$A := \begin{bmatrix} \dfrac{16}{12^2} \\ \dfrac{12}{12^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1111 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \; ft^2$$

$$E := \begin{bmatrix} 29000 \cdot 12^2 \\ 29000 \cdot 12^2 \end{bmatrix} \; ksf$$

$$I := \begin{bmatrix} \dfrac{800}{12^4} \\ \dfrac{400}{12^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0386 \\ 0.0193 \end{bmatrix} \; ft^4 \qquad L := \begin{bmatrix} 30 \\ \sqrt{15^2 + 20^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix} \; ft \qquad w := 2 \; \frac{kip}{ft}$$

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip \qquad V := \begin{bmatrix} \dfrac{w \cdot L_1}{2} & \dfrac{w \cdot L_1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip \qquad M := \begin{bmatrix} \dfrac{w \cdot {L_1}^2}{12} & -\dfrac{w \cdot {L_1}^2}{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip\,ft$$

Fórmulas

Matriz de rigidez de barra en el Sistema de Coordenadas Locales (SCL).

$$k(n) := \frac{E_n \cdot I_n}{{L_n}^3} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{A_n \cdot {L_n}^2}{I_n} & 0 & 0 & -\dfrac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot L_n & 0 & -12 & 6 \cdot L_n \\ 0 & 6 \cdot L_n & 4 \cdot {L_n}^2 & 0 & -6 \cdot L_n & 2 \cdot {L_n}^2 \\ -\dfrac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 & \dfrac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \cdot L_n & 0 & 12 & -6 \cdot L_n \\ 0 & 6 \cdot L_n & 2 \cdot {L_n}^2 & 0 & -6 \cdot L_n & 4 \cdot {L_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{seno}(n) := \frac{y_{n\,2} - y_{n\,1}}{L_n} \qquad \text{coseno}(n) := \frac{x_{n\,2} - x_{n\,1}}{L_n}$$

Matriz de transformación de coordenadas:

$$T(n) := \begin{bmatrix} \text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_f(n) := \begin{bmatrix} N_{n\,1} \\ V_{n\,1} \\ M_{n\,1} \\ N_{n\,2} \\ V_{n\,2} \\ M_{n\,2} \end{bmatrix}$$

Vector de Fuerzas en los Extremos SCL

Matriz de rigidez de barra en el Sistema de Coordenadas Globales (SCG).

$$K(n) := T(n)^T \cdot k(n) \cdot T(n)$$

Vector de Fuerzas en los Extremos, SCG.

$$F_f(n) := T(n)^{-1} \cdot Q_f(n)$$

Solución del problema:

Matrices de rigidez de barra:

$$k_1 := k(1) = \begin{bmatrix} 15466.6667 & 0 & 0 & -15466.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6049 & 1074.0741 & 0 & -71.6049 & 1074.0741 \\ 0 & 1074.0741 & 21481.4815 & 0 & -1074.0741 & 10740.7407 \\ -15466.6667 & 0 & 0 & 15466.6667 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6049 & -1074.0741 & 0 & 71.6049 & -1074.0741 \\ 0 & 1074.0741 & 10740.7407 & 0 & -1074.0741 & 21481.4815 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_1 := K(1) = \begin{bmatrix} 15466.6667 & 0 & 0 & -15466.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6049 & 1074.0741 & 0 & -71.6049 & 1074.0741 \\ 0 & 1074.0741 & 21481.4815 & 0 & -1074.0741 & 10740.7407 \\ -15466.6667 & 0 & 0 & 15466.6667 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6049 & -1074.0741 & 0 & 71.6049 & -1074.0741 \\ 0 & 1074.0741 & 10740.7407 & 0 & -1074.0741 & 21481.4815 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 := k(2) = \begin{bmatrix} 13920 & 0 & 0 & -13920 & 0 & 0 \\ 0 & 61.8667 & 773.3333 & 0 & -61.8667 & 773.3333 \\ 0 & 773.3333 & 12888.8889 & 0 & -773.3333 & 6444.4444 \\ -13920 & 0 & 0 & 13920 & 0 & 0 \\ 0 & -61.8667 & -773.3333 & 0 & 61.8667 & -773.3333 \\ 0 & 773.3333 & 6444.4444 & 0 & -773.3333 & 12888.8889 \end{bmatrix}$$

SCL

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SCG

$$K_2 := K(2) = \begin{bmatrix} 5050.7947 & -6651.904 & -618.6667 & -5050.7947 & 6651.904 & -618.6667 \\ -6651.904 & 8931.072 & -464 & 6651.904 & -8931.072 & -464 \\ -618.6667 & -464 & 12888.8889 & 618.6667 & 464 & 6444.4444 \\ -5050.7947 & 6651.904 & 618.6667 & 5050.7947 & -6651.904 & 618.6667 \\ 6651.904 & -8931.072 & 464 & -6651.904 & 8931.072 & 464 \\ -618.6667 & -464 & 6444.4444 & 618.6667 & 464 & 12888.8889 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global del Sistema, de dimensiones iguales a GL*GL donde GL = Grados de Libertad.

$$S := \begin{bmatrix} {K_1}_{4\,4} + {K_2}_{4\,4} & {K_1}_{4\,5} + {K_2}_{4\,5} & {K_1}_{4\,6} + {K_2}_{4\,6} \\ {K_1}_{5\,4} + {K_2}_{5\,4} & {K_1}_{5\,5} + {K_2}_{5\,5} & {K_1}_{5\,6} + {K_2}_{5\,6} \\ {K_1}_{6\,4} + {K_2}_{6\,4} & {K_1}_{6\,5} + {K_2}_{6\,5} & {K_1}_{6\,6} + {K_2}_{6\,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 20517.4613 & -6651.904 & 618.6667 \\ -6651.904 & 9002.6769 & -610.0741 \\ 618.6667 & -610.0741 & 34370.3704 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vector de fuerzas nodales P:

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Use unidades consistentes y siga la convención.

Vector de Fuerzas en los Extremos SCL

$$Q_{f1} := Q_f(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 150 \\ 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \qquad Q_{f2} := Q_f(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector de Fuerzas en los Extremos SCG

$$F_{f1} := F_f(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 150 \\ 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \\ kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \qquad F_{f2} := F_f(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje del vector de fuerzas en los extremos SCG:

$$P_f := \begin{bmatrix} F_{f1_4} + F_{f2_4} \\ F_{f1_5} + F_{f2_5} \\ F_{f1_6} + F_{f2_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema para los desplazamientos:

$$d := S^{-1} \cdot \left(P - P_f\right) = \begin{bmatrix} -0.00149 \\ -0.00399 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ft \\ ft \\ rad \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vectores de desplazamientos en el SCG:

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0015 \\ -0.004 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0015 \\ -0.004 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vectores de desplazamientos en el SCL:

$$u_1 := T(1) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0015 \\ -0.004 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \qquad u_2 := T(2) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0023 \\ 0.0036 \\ 0.0065 \end{bmatrix}$$

Fuerzas en las barras, en el SCL:

$$Q_1 := k_1 \cdot u_1 + Q_{f1} = \begin{bmatrix} 23.0556 \\ 37.2699 \\ 224.1283 \\ -23.0556 \\ 22.7301 \\ -6.0323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \\ kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \quad Q_2 := k_2 \cdot u_2 + Q_{f2} = \begin{bmatrix} 32.0175 \\ 4.8064 \\ 39.1286 \\ -32.0175 \\ -4.8064 \\ 81.0323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \\ kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix}$$

Fuerzas en las barras, en el SCG:

$$F_1 := K_1 \cdot v_1 + F_f(1) = \begin{bmatrix} 23.0556 \\ 37.2699 \\ 224.1283 \\ -23.0556 \\ 22.7301 \\ -6.0323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \\ kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad F_2 := K_2 \cdot v_2 + F_f(2) = \begin{bmatrix} -23.0556 \\ 22.7301 \\ 39.1286 \\ 23.0556 \\ -22.7301 \\ 81.0323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kip \\ kip \\ kip\ ft \\ kip \\ kip \\ kip\ ft \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reacciones:

$$R := \begin{bmatrix} F_{1_1} \\ F_{1_2} \\ F_{1_3} \\ F_{2_1} \\ F_{2_2} \\ F_{2_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.0556 \\ 37.2699 \\ 224.1283 \\ -23.0556 \\ 22.7301 \\ 39.1286 \end{bmatrix}$$