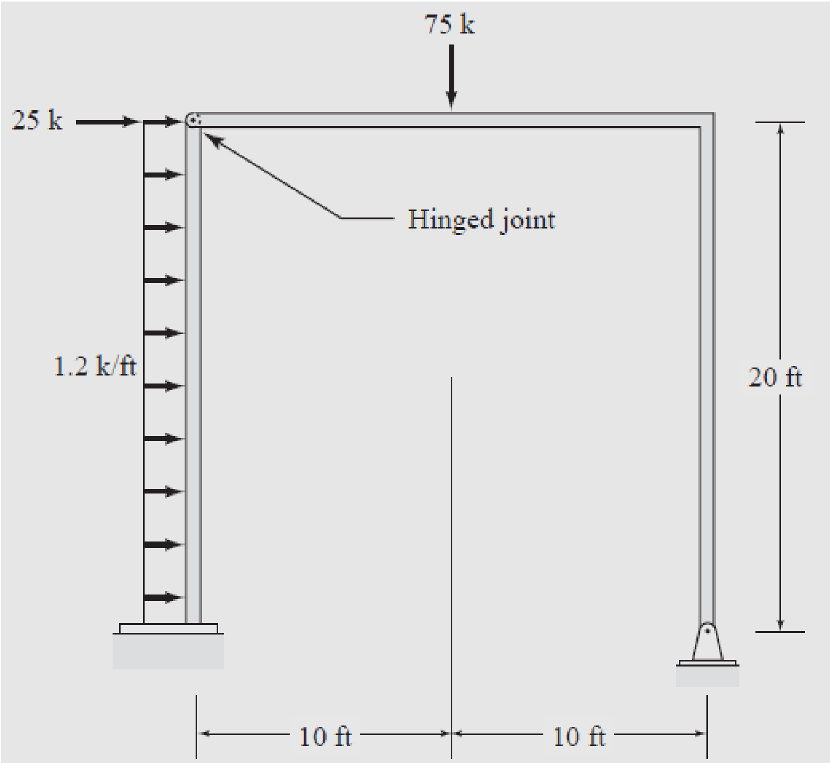
Ejemplo con Articulaciones



$E, A, I =$ constant
$E = 29{,}000$ ksi
$A = 14.7$ in.^{2}
$I = 800$ in.^{4}

(a) Frame

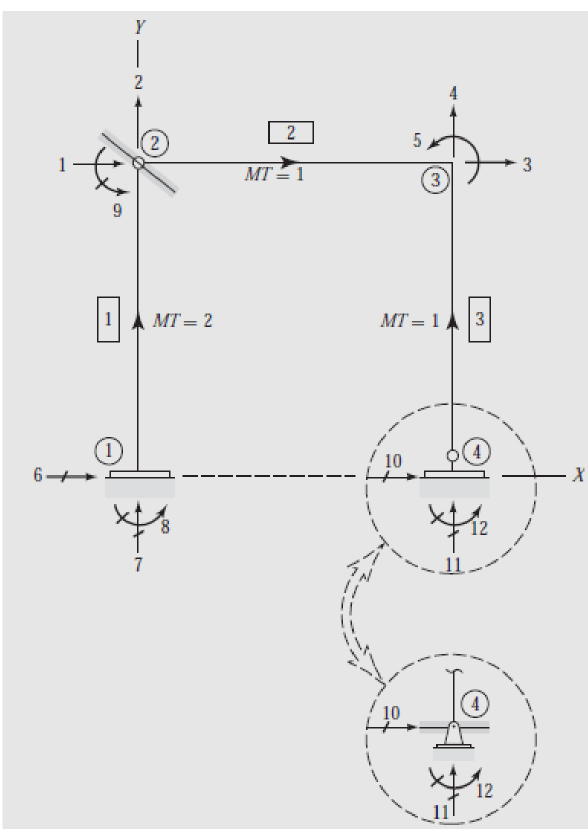
$$E := \begin{bmatrix} 29000 \\ 29000 \\ 29000 \end{bmatrix} \; ksi$$

$$A := \begin{bmatrix} 14.7 \\ 14.7 \\ 14.7 \end{bmatrix} \; in^2$$

$$I := \begin{bmatrix} 800 \\ 800 \\ 800 \end{bmatrix} \; in^4$$

$$L := \begin{bmatrix} 20 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 240 \\ 240 \end{bmatrix} \; in$$

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 & 20 \cdot 12 \end{bmatrix} \; in \qquad y := \begin{bmatrix} 0 & 20 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 & 20 \cdot 12 \\ 0 & 20 \cdot 12 \end{bmatrix} \; in$$



$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip$$

$$V := \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{1.2}{12} \cdot 20 \cdot 12}{2} & \dfrac{\dfrac{1.2}{12} \cdot 20 \cdot 12}{2} \\ \dfrac{75}{2} & \dfrac{75}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 37.5 & 37.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip$$

$$M := \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{1.2}{12} \cdot (20 \cdot 12)^2}{12} & -\dfrac{\dfrac{1.2}{12} \cdot (20 \cdot 12)^2}{12} \\ \dfrac{75 \cdot (20 \cdot 12)}{8} & -\dfrac{75 \cdot (20 \cdot 12)}{8} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 & -480 \\ 2250 & -2250 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; kip \; in$$

Fórmulas

Extremo de inicio articulado

$$k_{inicioArticulado}(n):=\frac{E_{n}\cdot I_{n}}{{L_{n}}^{3}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{A_{n}\cdot {L_{n}}^{2}}{I_{n}} & 0 & 0 & -\frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3\cdot L_{n}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0 & \frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3\cdot L_{n}\\ 0 & 3\cdot L_{n} & 0 & 0 & -3\cdot L_{n} & 3\cdot {L_{n}}^{2}\end{bmatrix}\qquad Q_{fInicioArticulado}(n):=\begin{bmatrix}N_{n\,1}\\ V_{n\,1}-\frac{3}{2\cdot L_{n}}\cdot M_{n\,1}\\ 0\\ N_{n\,2}\\ V_{n\,2}+\frac{3}{2\cdot L_{n}}\cdot M_{n\,1}\\ M_{n\,2}-\frac{1}{2}\cdot M_{n\,1}\end{bmatrix}$$

Extremo de fin articulado

$$k_{finArticulado}(n):=\frac{E_{n}\cdot I_{n}}{{L_{n}}^{3}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{A_{n}\cdot {L_{n}}^{2}}{I_{n}} & 0 & 0 & -\frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\cdot L_{n} & 0 & -3 & 0\\ 0 & 3\cdot L_{n} & 3\cdot {L_{n}}^{2} & 0 & -3\cdot L_{n} & 0\\ -\frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0 & \frac{A_{n}\cdot \left(L_{n}\right)^{2}}{I_{n}} & 0 & 0\\ 0 & -3 & -3\cdot L_{n} & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad Q_{fFinArticulado}(n):=\begin{bmatrix}N_{n\,1}\\ V_{n\,1}-\frac{3}{2\cdot L_{n}}\cdot M_{n\,2}\\ M_{n\,1}-\frac{1}{2}\cdot M_{n\,2}\\ N_{n\,2}\\ V_{n\,2}+\frac{3}{2\cdot L_{n}}\cdot M_{n\,2}\\ 0\end{bmatrix}$$

Ambos extremos articulados

$$k_{armadura}:=\frac{E_{n}\cdot A_{n}}{L_{n}}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad Q_{fArmadura}(n):=\begin{bmatrix}N_{n\,1}\\ V_{n\,1}-\frac{1}{L_{n}}\cdot\left(M_{n\,1}+M_{n\,2}\right)\\ 0\\ N_{n\,2}\\ V_{n\,2}+\frac{1}{L_{n}}\cdot\left(M_{n\,1}+M_{n\,2}\right)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{seno}(n):=\frac{y_{n\,2}-y_{n\,1}}{L_{n}}\qquad \text{coseno}(n):=\frac{x_{n\,2}-x_{n\,1}}{L_{n}}$$

$$T(n):=\begin{bmatrix}\text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \text{coseno}(n) & \text{seno}(n) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\text{seno}(n) & \text{coseno}(n) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrices de rigidez locales de cada barra

La barra 1 (columna de la izquierda) tiene su extremo final articulado.

$$k_1 := k_{finArticulado}(1) = \begin{bmatrix} 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0347 & 1208.3333 & 0 & -5.0347 & 0 \\ 0 & 1208.3333 & 2.9 \cdot 10^5 & 0 & -1208.3333 & 0 \\ -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0347 & -1208.3333 & 0 & 5.0347 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La barra 2 (viga) tiene su extremo inicial articulado.

$$k_2 := k_{inicioArticulado}(2) = \begin{bmatrix} 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0347 & 0 & 0 & -5.0347 & 1208.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0347 & 0 & 0 & 5.0347 & -1208.3333 \\ 0 & 1208.3333 & 0 & 0 & -1208.3333 & 2.9 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

La barra 3 (columna de la derecha) tiene su extremo inicial articulado.

$$k_3 := k_{inicioArticulado}(3) = \begin{bmatrix} 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0347 & 0 & 0 & -5.0347 & 1208.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0347 & 0 & 0 & 5.0347 & -1208.3333 \\ 0 & 1208.3333 & 0 & 0 & -1208.3333 & 2.9 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Vectores de fuerzas de extremo fijo

$$Q_{f1} := Q_{fFinArticulado}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 720 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T_1 := T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_{f1} := T(1)^{-1} \cdot Q_{f1} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 720 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f2} := Q_{fInicioArticulado}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 23.4375 \\ 0 \\ 0 \\ 51.5625 \\ -3375 \end{bmatrix} \quad T_2 := T(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_{f2} := T(2)^{-1} \cdot Q_{f2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23.4375 \\ 0 \\ 0 \\ 51.5625 \\ -3375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f3} := Q_{fInicioArticulado}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T_3 := T(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_{f3} := T(3)^{-1} \cdot Q_{f3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matrices de rigidez globales de cada barra

$$K_1 := {T_1}^T \cdot k_1 \cdot T_1 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 5.0347 & 0 & -1208.3333 & -5.0347 & 0 & 0 \\ 0 & 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 \\ -1208.3333 & 0 & 2.9 \cdot 10^5 & 1208.3333 & 0 & 0 \\ -5.0347 & 0 & 1208.3333 & 5.0347 & 0 & 0 \\ 0 & -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_2 := {T_2}^T \cdot k_2 \cdot T_2 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0347 & 0 & 0 & -5.0347 & 1208.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0347 & 0 & 0 & 5.0347 & -1208.3333 \\ 0 & 1208.3333 & 0 & 0 & -1208.3333 & 2.9 \cdot 10^5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_3 := {T_3}^T \cdot k_3 \cdot T_3 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 5.0347 & 0 & 0 & -5.0347 & 0 & -1208.3333 \\ 0 & 1776.25 & 0 & 0 & -1776.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0347 & 0 & 0 & 5.0347 & 0 & 1208.3333 \\ 0 & -1776.25 & 0 & 0 & 1776.25 & 0 \\ -1208.3333 & 0 & 0 & 1208.3333 & 0 & 2.9 \cdot 10^5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez global del sistema

$$S := \begin{bmatrix} {K_1}_{4\,4} + {K_2}_{1\,1} & {K_1}_{4\,5} + {K_2}_{1\,2} & {K_2}_{1\,4} & {K_2}_{1\,5} & {K_2}_{1\,6} \\ {K_1}_{5\,4} + {K_2}_{2\,1} & {K_1}_{5\,5} + {K_2}_{2\,2} & {K_2}_{2\,4} & {K_2}_{2\,5} & {K_2}_{2\,6} \\ {K_2}_{4\,1} & {K_2}_{4\,2} & {K_2}_{4\,4} + {K_3}_{4\,4} & {K_2}_{4\,5} + {K_3}_{4\,5} & {K_2}_{4\,6} + {K_3}_{4\,6} \\ {K_2}_{5\,1} & {K_2}_{5\,2} & {K_2}_{5\,4} + {K_3}_{5\,4} & {K_2}_{5\,5} + {K_3}_{5\,5} & {K_2}_{5\,6} + {K_3}_{5\,6} \\ {K_2}_{6\,1} & {K_2}_{6\,2} & {K_2}_{6\,4} + {K_3}_{6\,4} & {K_2}_{6\,5} + {K_3}_{6\,5} & {K_2}_{6\,6} + {K_3}_{6\,6} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1781.2847 & 0 & -1776.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1781.2847 & 0 & -5.0347 & 1208.3333 \\ -1776.25 & 0 & 1781.2847 & 0 & 1208.3333 \\ 0 & -5.0347 & 0 & 1781.2847 & -1208.3333 \\ 0 & 1208.3333 & 1208.3333 & -1208.3333 & 5.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Vectores de fuerza

$$P := \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_f := \begin{bmatrix} {F_{f1}}_4 + {F_{f2}}_1 \\ {F_{f1}}_5 + {F_{f2}}_2 \\ {F_{f2}}_4 + {F_{f3}}_4 \\ {F_{f2}}_5 + {F_{f3}}_5 \\ {F_{f2}}_6 + {F_{f3}}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 23.4375 \\ 0 \\ 51.5625 \\ -3375 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema

$$d := S^{-1}\cdot\left(P - P_f\right) = \begin{bmatrix} 3.58 \\ -0.0121 \\ 3.571 \\ -0.0301 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y fuerzas en los extremos de los miembros

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.58 \\ -0.0121 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_1 := T(1)\cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0121 \\ -3.58 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 := k_1\cdot u_1 + Q_{f1} = \begin{bmatrix} 21.5244 \\ 33.0244 \\ 5045.8677 \\ -21.5244 \\ -9.0244 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F_1 := K_1\cdot v_1 + F_{f1} = \begin{bmatrix} -33.0244 \\ 21.5244 \\ 5045.8677 \\ 9.0244 \\ -21.5244 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Se puede evaluar la rotación u.6 del extremo liberado con la expresión:

$$u_{barra1dr6} := \frac{3}{2\cdot L_1}\cdot\left(-u_{1\,2} + u_{1\,5}\right) - \frac{1}{2}\cdot u_{1\,3} - \frac{L_1}{4\cdot E_1\cdot I_1}\cdot M_{1\,2} = -0.0211 \ rad$$

Ya que las rotaciones de los extremos de los miembros son iguales en el SCL y el SCG, v6=u6.

Desplazamiento Rotacional 6

$$u_3 = \frac{3}{2L}(-u_2 + u_5) - \frac{1}{2}u_6 - \frac{L}{4EI}FM_b$$

Rotación en el extremo liberado cuando se libera el nodo de inicio.

$$u_6 = \frac{3}{2L}(-u_2 + u_5) - \frac{1}{2}u_3 - \frac{L}{4EI}FM_e$$

Rotación en el extremo liberado cuando se libera el nodo de fin.

$$u_3 = \frac{1}{L}(-u_2 + u_5) - \frac{L}{6EI}(2FM_b - FM_e)$$

Rotación en el extremo liberado de inicio cuando se liberan ambos extremos.

$$u_6 = \frac{1}{L}(-u_2 + u_5) - \frac{L}{6EI}(2FM_e - FM_b)$$

Rotación en el extremo liberado de fin cuando se liberan ambos extremos.

$$v_2 := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.58 \\ -0.0121 \\ 0 \\ 3.571 \\ -0.0301 \\ -0.0017 \end{bmatrix} \qquad u_2 := T(2) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 3.58 \\ -0.0121 \\ 0 \\ 3.571 \\ -0.0301 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 := k_2 \cdot u_2 + Q_{f2} = \begin{bmatrix} 15.9756 \\ 21.5244 \\ 0 \\ -15.9756 \\ 53.4756 \\ -3834.1323 \end{bmatrix} \qquad F_2 := K_2 \cdot v_2 + F_{f2} = \begin{bmatrix} 15.9756 \\ 21.5244 \\ 0 \\ -15.9756 \\ 53.4756 \\ -3834.1323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$u_{barra2dr3} := \frac{3}{2 \cdot L_2} \cdot \left(-u_{2_2} + u_{2_5} \right) - \frac{1}{2} \cdot u_{2_6} - \frac{L_2}{4 \cdot E_2 \cdot I_2} \cdot M_{2\,1} = -0.0051$$

$$v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.571 \\ -0.0301 \\ -0.0017 \end{bmatrix} \qquad u_3 := T(3) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0301 \\ -3.571 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 := k_3 \cdot u_3 + Q_{f3} = \begin{bmatrix} 53.4756 \\ 15.9756 \\ 0 \\ -53.4756 \\ -15.9756 \\ 3834.1323 \end{bmatrix} \qquad F_3 := K_3 \cdot v_3 + F_{f3} = \begin{bmatrix} -15.9756 \\ 53.4756 \\ 0 \\ 15.9756 \\ -53.4756 \\ 3834.1323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Las reacciones son:

$$R := \begin{bmatrix} F_{1_1} \\ F_{1_2} \\ F_{1_3} \\ F_{1_6} + F_{2_3} \\ F_{3_1} \\ F_{3_2} \\ F_{3_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.0244 \\ 21.5244 \\ 5045.8677 \\ 0 \\ -15.9756 \\ 53.4756 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Nuestros grados de libertad "afianzados", es decir, los 9 y 12 deben de dar 0. Los demás son las reacciones debidas a los apoyos originales.

71 Viga Liberada.sdb
71 Columna Liberada.sdb

Si en SAP2000 se liberan los dos miembros que llegan a la junta 2, el LOG muestra errores. Además, no se muestra la rotación en el extremo libre.

Si se libera la columna, la rotación que se obtiene es u.3 (inicio de la viga).

Joint Displacements

Joint Object 2 Joint Element 2

	1	2	3
Trans	3.58371	0.	-0.01212
Rotn	0.	0.00511	0.

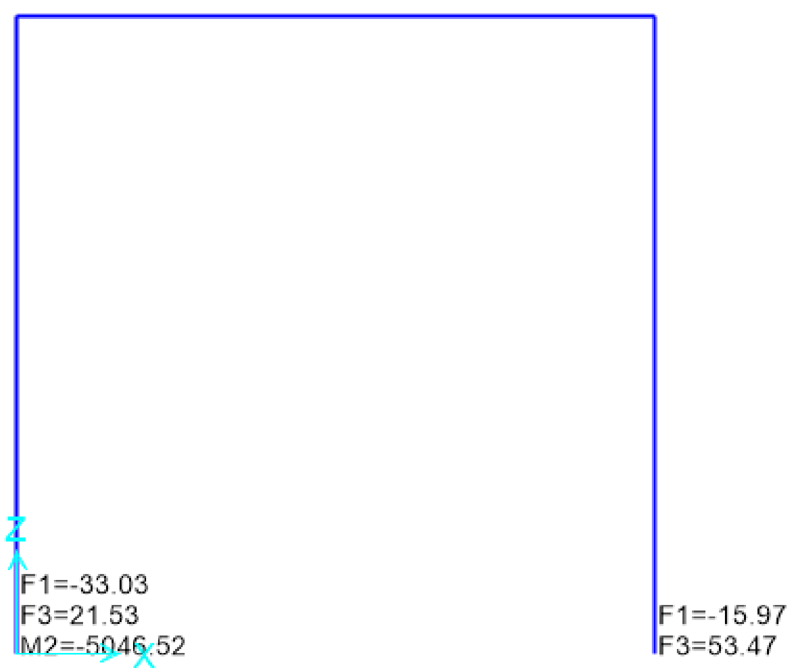
Si se libera la viga, la rotación que se obtiene es u.6 (final de la columna).

Joint Displacements

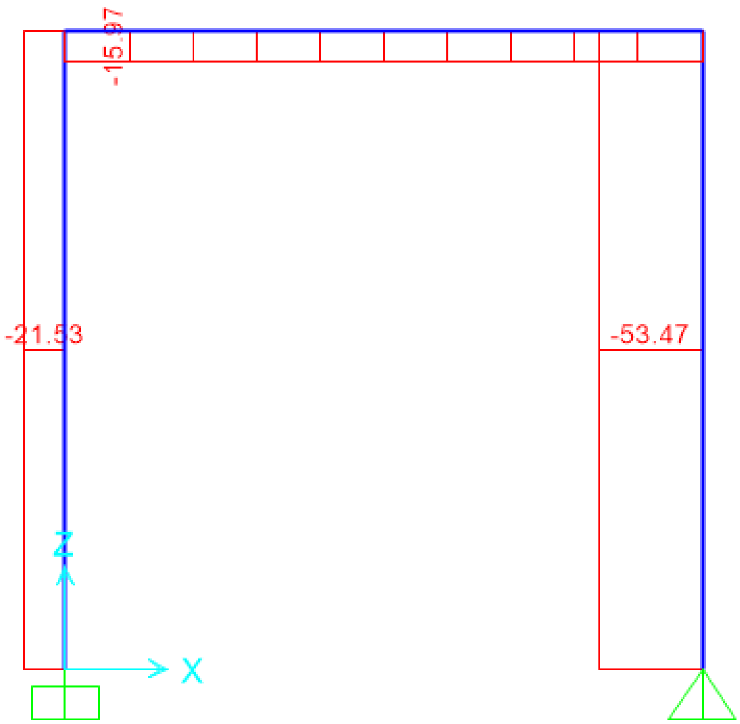
Joint Object 2 Joint Element 2

	1	2	3
Trans	0.29864	0.	-0.00101
Rotn	0.	0.02114	0.

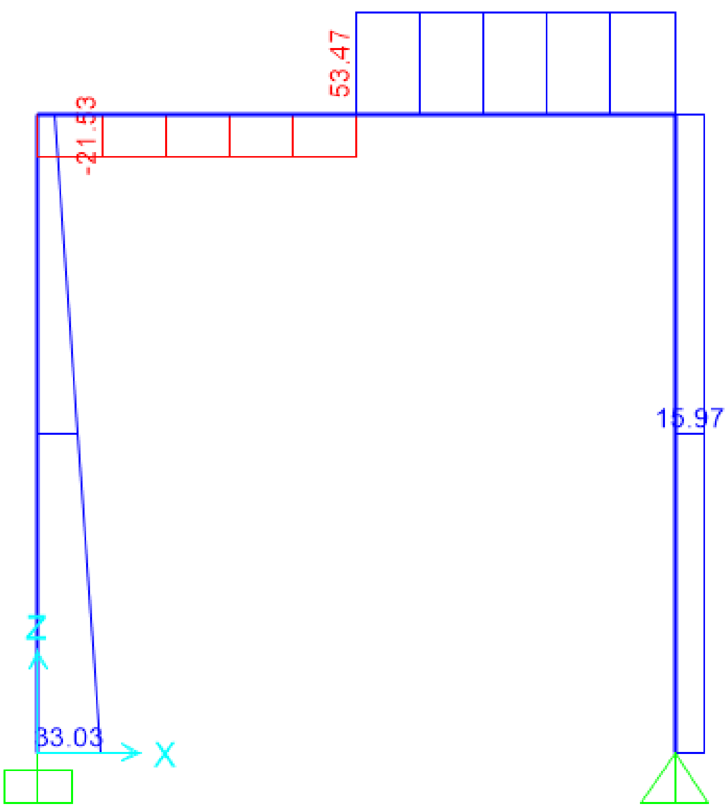
Reacciones



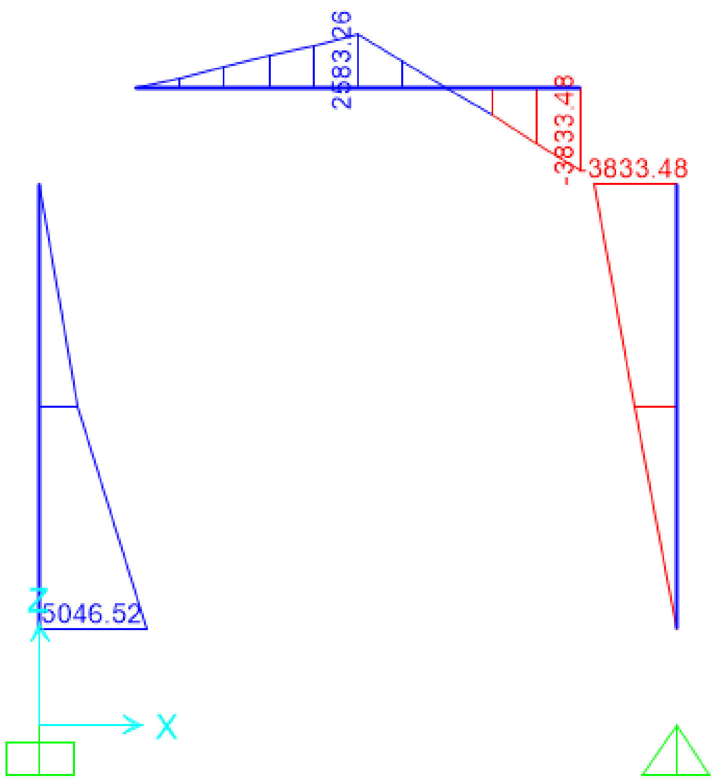
Fuerzas axiales



Fuerzas cortantes



Momentos flexionantes del lado de las compresiones



Fuerzas en los extremos de las barras (F)