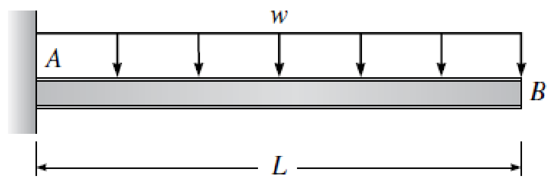
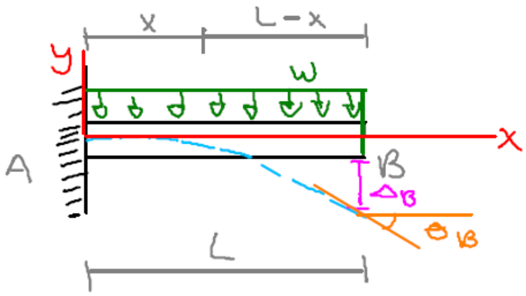
Ejemplo del Método de la Doble Integración

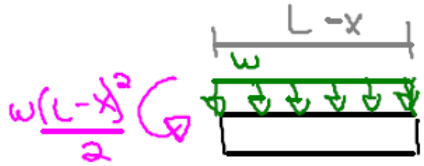
Encuentre las ecuaciones para la pendiente y la deflexión para la siguiente viga. Compare la deflexión en B con la deflexión al centro del claro.



Si se hace un corte del extremo derecho de la viga, el momento se puede expresar en función de x como:

$$M = w\frac{(L-x)^2}{2}$$





Y sabemos que integrando dos veces el diagrama de curvaturas se obtiene la deflexión:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Sustituyendo nuestra función de momento:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{1}{EI}\right) w\frac{(L-x)^2}{2}$$

Moviendo de lugar las constantes para simplificar la integración.

$$2EI\frac{d^2y}{dx^2} = -w(L-x)^2$$

Expandiendo el binomio elevado al cuadrado:

$$2EI\frac{d^2y}{dx^2} = -w(L^2 - 2Lx + x^2)$$

Multiplicando el lado derecho por w y arreglando:

$$2EI\frac{d^2y}{dx^2} = -wL^2 + 2wLx - wx^2$$

Integrando por primera vez obtendremos la pendiente:

$$2EI\frac{dy}{dx} = -wL^2x + \frac{2wLx^2}{2} - \frac{wx^3}{3} + C_1$$

Sabiendo que en $x = 0$, la rotación es cero, debido al empotramiento, se entiende que $C_1 = 0$.

$$x = 0; \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

Limpiando:

$$2EI\frac{dy}{dx} = -wL^2x + wLx^2 - \frac{wx^3}{3}$$

Integrando por segunda ocasión obtendremos la deflexión:

$$2EIy = -\frac{wL^2x^2}{2} + \frac{wLx^3}{3} - \frac{wx^4}{12} + C_2$$

Sabiendo que en $x = 0$, el desplazamiento es cero, debido al empotramiento, se entiende que $C_2 = 0$.

$$x = 0; y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Limpiando:

$$2EIy = -\frac{wL^2x^2}{2} + \frac{wLx^3}{3} - \frac{wx^4}{12}$$

Ahora podemos calcular la rotación y la deflexión en el punto B, es decir, donde $x = L$.

Sustituyendo en la primera ecuación sombreada:

$$2EI\frac{dy}{dx} = -wL^3 + wL^3 - \frac{wL^3}{3}$$

$$\theta_B = \frac{dy}{dx} = -\frac{wL^3}{6EI}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación sombreada:

$$2EIy = -\frac{wL^4}{2} + \frac{wL^4}{3} - \frac{wL^4}{12}$$

$$\Delta_B = y = -\frac{wL^4}{8EI}$$

También se pide comparar con el desplazamiento al centro del claro, es decir, $x = L/2$. Sustituyendo en la segunda ecuación sombreada:

$$2EIy = -\frac{wL^4}{8} + \frac{wL^4}{24} - \frac{wL^4}{192}$$

$$\Delta_B = y = -\frac{17wL^4}{384EI}$$

Comparando:

$$\frac{\Delta_{\frac{L}{2}}}{\Delta_L} = \frac{-\frac{17wL^4}{384EI}}{-\frac{wL^4}{8EI}} = \frac{17}{48} = 0.35$$

Lo que implica que al centro del claro sólo se tiene un desplazamiento del 35% del desplazamiento máximo al final del claro.