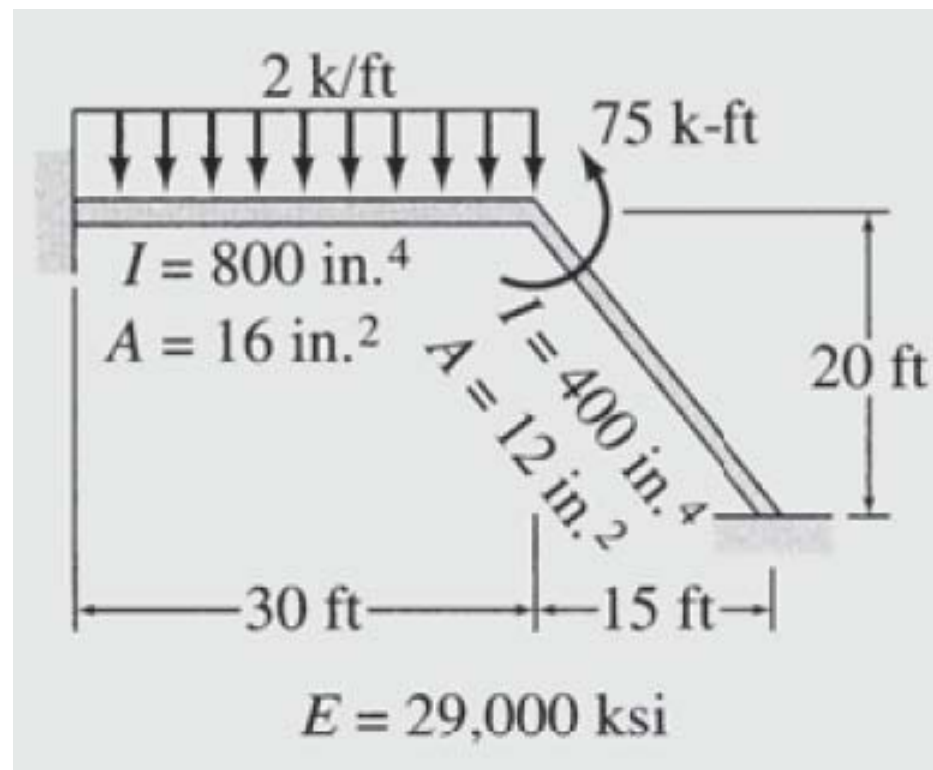


Método General de las Rigideces

Marco

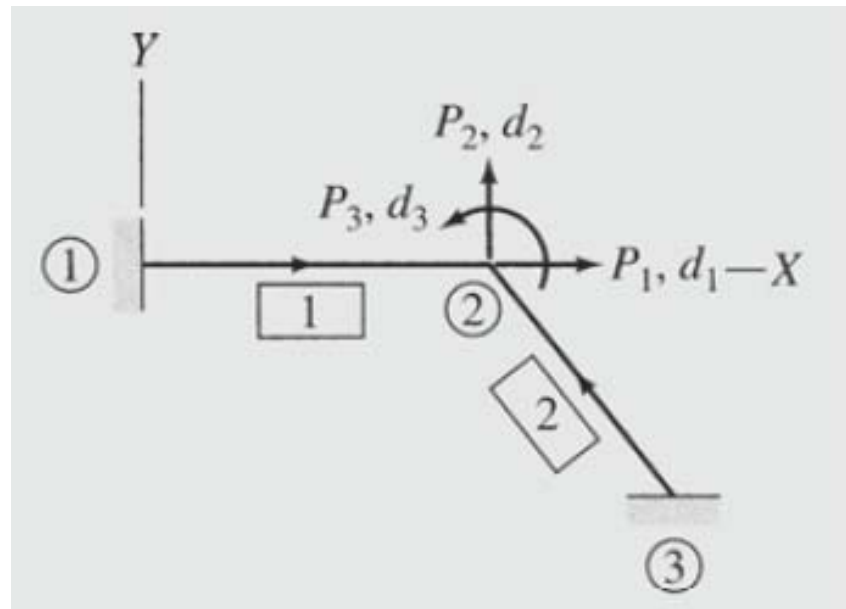
Marco

- Determine las reacciones y las fuerzas en los extremos de los miembros para el siguiente marco, utilizando el método matricial de las rigideces.



Modelo Analítico

- Grados de libertad. Del modelo analítico del marco, observamos que mientras que las uniones 1 y 3 de la estructura no pueden ni trasladarse ni rotar, la junta 2 es libre de efectuar ambos movimientos. Por lo tanto, el marco tiene tres grados de libertad: las traslaciones d_1 y d_2 (en las direcciones X y Y respectivamente), y la rotación d_3 en el nodo 2.



Matriz de rigidez de la estructura: Miembro 1

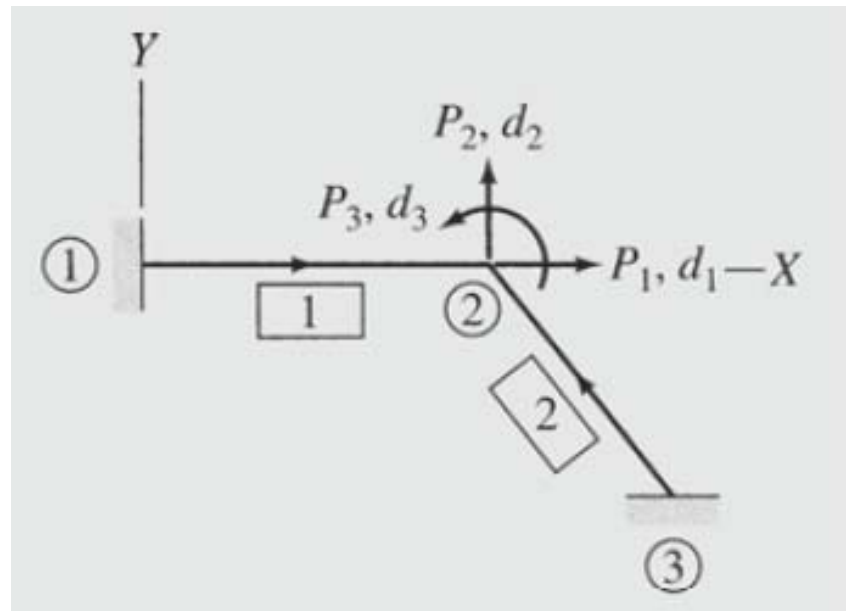
- Miembro 1. Como el sistema de coordenadas xy de este miembro coincide con el sistema de coordenadas global XY , no se requieren transformaciones de coordenadas; esto es, las relaciones de rigidez en el sistema de coordenadas local y global son las mismas. Al sustituir $E = 29,000(12)^2 \text{ ksf}$, $I = 800/(12)^4 \text{ ft}^4$, $A = 16/(12)^2 \text{ ft}^2$ y $L = 30 \text{ ft}$, obtenemos:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 15,466.67 & 0 & 0 & -15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6 & 1,074.07 & 0 & -71.6 & 1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 21,481.48 & 0 & -1,074.07 & 10,740.74 \\ -15,466.67 & 0 & 0 & 15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6 & -1,074.07 & 0 & 71.6 & -1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 10,740.74 & 0 & -1,074.07 & 21,481.48 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Veamos los Grados de Libertad

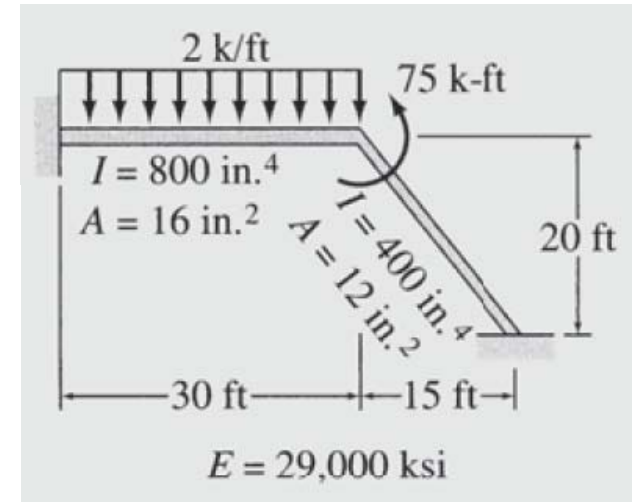
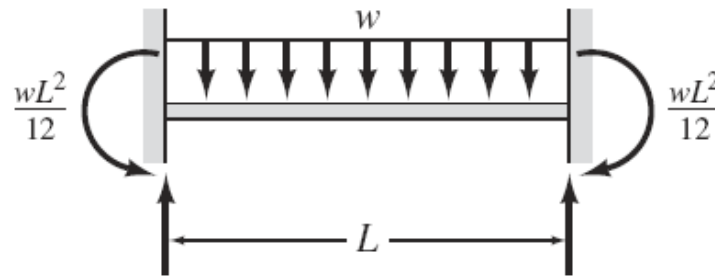
Con los que se asocian las filas y columnas de la matriz de rigidez.



$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 15,466.67 & 0 & 0 & -15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6 & 1,074.07 & 0 & -71.6 & 1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 21,481.48 & 0 & -1,074.07 & 10,740.74 \\ -15,466.67 & 0 & 0 & 15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6 & -1,074.07 & 0 & 71.6 & -1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 10,740.74 & 0 & -1,074.07 & 21,481.48 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Momentos de Empotramiento en los Extremos

Miembro 1

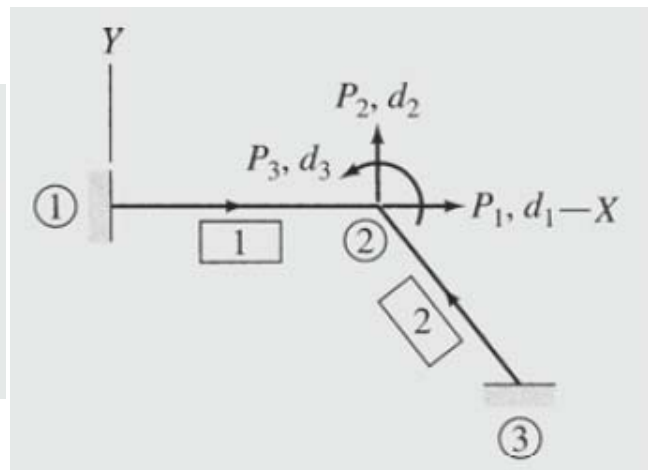
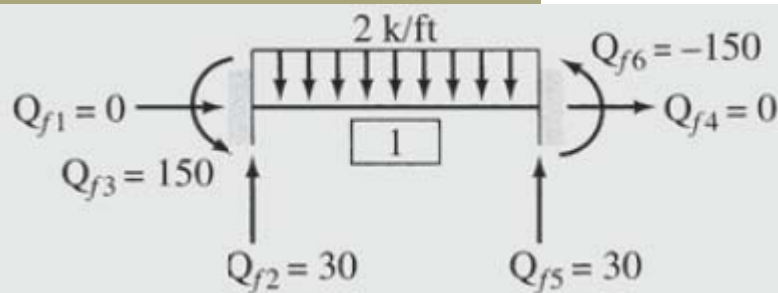


- Evaluamos los momentos de empotramiento en los extremos:

$$\bullet Q_{f3} = -Q_{f6} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

- Aplicando las ecuaciones de equilibrio al miembro, obtenemos los cortantes:

$$\bullet Q_{f2} = Q_{f5} = 30 \text{ k}$$



$$\mathbf{F}_{f1} = \mathbf{Q}_{f1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 150 \\ 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura:
Miembro 2

- Miembro 2. Sustituyendo $E = 29,000(12)^2 \text{ ksf}$, $I = 400/(12)^4 \text{ ft}^4$, $A = 12/(12)^2 \text{ ft}^2$ y $L = 25 \text{ ft}$, obtenemos:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 13,920 & 0 & 0 & -13,920 & 0 & 0 \\ 0 & 61.87 & 773.33 & 0 & -61.87 & 773.33 \\ 0 & 773.33 & 12,888.89 & 0 & -773.33 & 6,444.44 \\ -13,920 & 0 & 0 & 13,920 & 0 & 0 \\ 0 & -61.87 & -773.33 & 0 & 61.87 & -773.33 \\ 0 & 773.33 & 6,444.44 & 0 & -773.33 & 12,888.89 \end{bmatrix}$$

Transformación de Coordenadas (Miembro 2)

- Usando las coordenadas globales del nodo de inicio (3) y el nodo de fin (2), determinamos los cosenos de dirección del miembro 2 como:

$$\cos \theta = \frac{X_2 - X_3}{L} = \frac{30 - 45}{25} = -0.6$$

$$\sin \theta = \frac{Y_2 - Y_3}{L} = \frac{0 - (-20)}{25} = 0.8$$

- Sustituyendo estos valores en la ecuación de transformación, obtenemos:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación de Coordenadas (Miembro 2)

- Para determinar la matriz de rigidez del miembro en las coordenadas globales, K_2 , sustituimos las matrices k_2 y T_2 en la relación $K = T^T k T$, y llevamos a cabo las multiplicaciones matriciales necesarias para obtener:

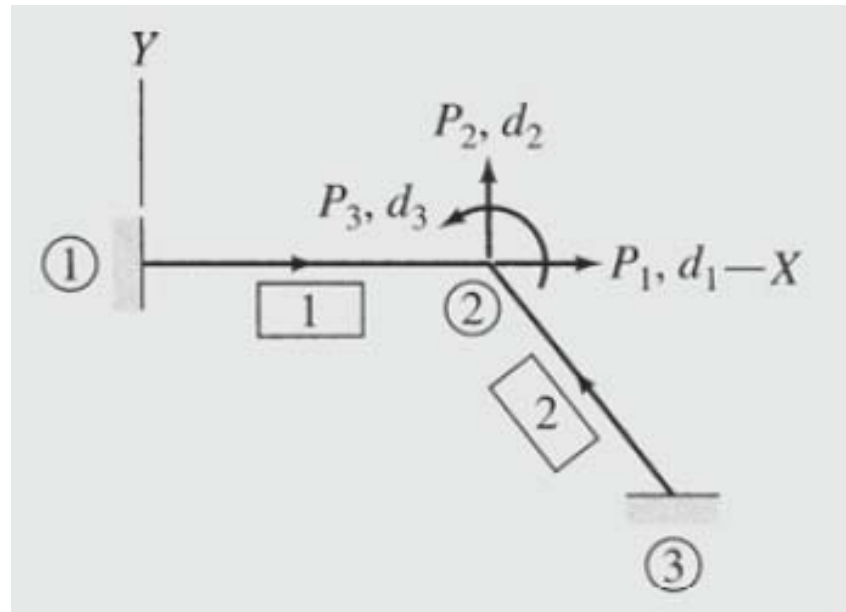
$$K_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5,050.8 & -6,651.9 & -618.67 & -5,050.8 & 6,651.9 & -618.67 \\ -6,651.9 & 8,931.07 & -464 & 6,651.9 & -8,931.07 & -464 \\ -618.67 & -464 & 12,888.89 & 618.67 & 464 & 6,444.44 \\ -5,050.8 & 6,651.9 & 618.67 & 5,050.8 & -6,651.9 & 618.67 \\ 6,651.9 & -8,931.07 & 464 & -6,651.9 & 8,931.07 & 464 \\ -618.67 & -464 & 6,444.44 & 618.67 & 464 & 12,888.89 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

- Vea que K_2 es simétrica. Al usar los números de los grados de libertad de la estructura, 0, 0, 0, 1, 2, 3 para el miembro 2, los elementos relevantes de K_2 se agregan a su posición en la matriz S .
- Como este miembro no tiene cargas externas, $Q_{f2} = 0$. Pero sí tiene un momento en el nodo.

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Vea los Grados de Libertad

Con los que se asocian las filas y columnas de la matriz de rigidez.



$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5,050.8 & -6,651.9 & -618.67 & -5,050.8 & 6,651.9 & -618.67 \\ -6,651.9 & 8,931.07 & -464 & 6,651.9 & -8,931.07 & -464 \\ -618.67 & -464 & 12,888.89 & 618.67 & 464 & 6,444.44 \\ -5,050.8 & 6,651.9 & 618.67 & 5,050.8 & -6,651.9 & 618.67 \\ 6,651.9 & -8,931.07 & 464 & -6,651.9 & 8,931.07 & 464 \\ -618.67 & -464 & 6,444.44 & 618.67 & 464 & 12,888.89 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Global y Vector de Cargas en los Nodos

$$\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 15,466.67 & 0 & 0 & -15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6 & 1,074.07 & 0 & -71.6 & 1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 21,481.48 & 0 & -1,074.07 & 10,740.74 \\ -15,466.67 & 0 & 0 & 15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6 & -1,074.07 & 0 & 71.6 & -1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 10,740.74 & 0 & -1,074.07 & 21,481.48 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5,050.8 & -6,651.9 & -618.67 & -5,050.8 & 6,651.9 & -618.67 \\ -6,651.9 & 8,931.07 & -464 & 6,651.9 & -8,931.07 & -464 \\ -618.67 & -464 & 12,888.89 & 618.67 & 464 & 6,444.44 \\ -5,050.8 & 6,651.9 & 618.67 & 5,050.8 & -6,651.9 & 618.67 \\ 6,651.9 & -8,931.07 & 464 & -6,651.9 & 8,931.07 & 464 \\ -618.67 & -464 & 6,444.44 & 618.67 & 464 & 12,888.89 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (15,466.67 + 5,050.8) & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & (71.6 + 8,931.07) & (-1,074.07 + 464) \\ 618.67 & (-1,074.07 + 464) & (21,481.48 + 12,888.89) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Desplazamientos
en los Nodos

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{Sd}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- De donde,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y
Fuerzas en los
Extremos de los
Miembros
Miembro 1

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

- Al sustituir k_1 , Q_{f1} y u_1 en la relación de rigidez del miembro $\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q}_f$, encontramos las fuerzas en los extremos del miembro.

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \\ -23.05 \text{ k} \\ 22.73 \text{ k} \\ -6.08 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y
Fuerzas en los
Extremos de los
Miembros

Miembro 2

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

- Al sustituir \mathbf{K}_2 , \mathbf{v}_2 y $\mathbf{F}_{f2} = \mathbf{0}$ en la relación de rigidez del miembro en coordenadas globales $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{F}_f$, encontramos las fuerzas en los extremos del miembro en coordenadas globales:

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ 23.04 \text{ k} \\ -22.71 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y
Fuerzas en los
Extremos de los
Miembros

Miembro 2

- Las fuerzas en los extremos del miembro en las coordenadas locales ahora se pueden evaluar sustituyendo F_2 y T_2 en la relación $\mathbf{Q} = \mathbf{TF}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{TF}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

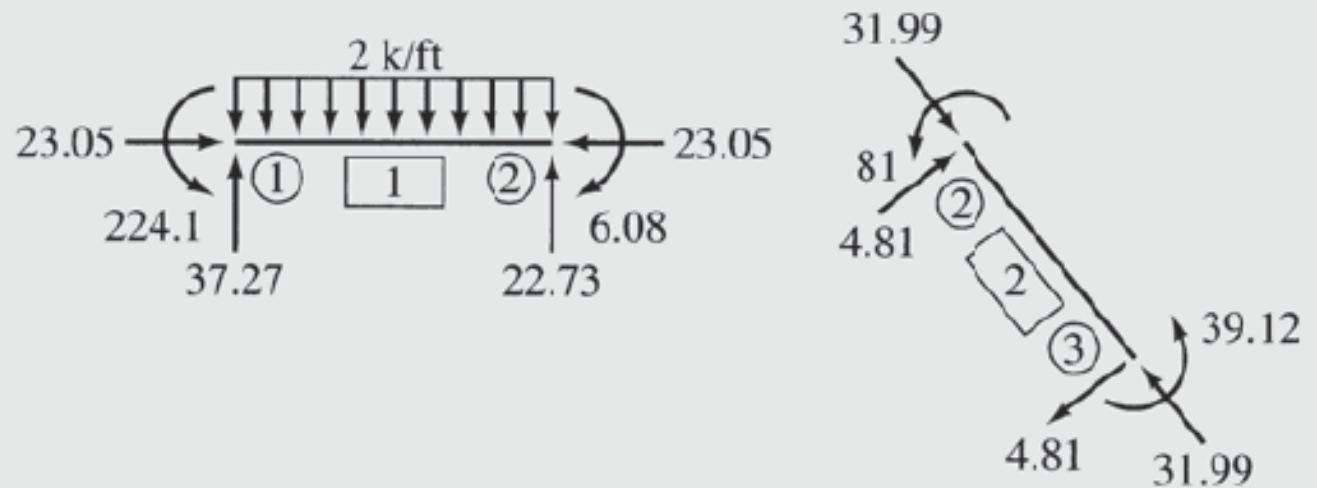
$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ 23.04 \text{ k} \\ -22.71 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 31.99 \text{ k} \\ 4.81 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ -31.99 \text{ k} \\ -4.81 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de los miembros en coordenadas locales

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \\ -23.05 \text{ k} \\ 22.73 \text{ k} \\ -6.08 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 31.99 \text{ k} \\ 4.81 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ -31.99 \text{ k} \\ -4.81 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$



(e) Member End Forces in Local Coordinates

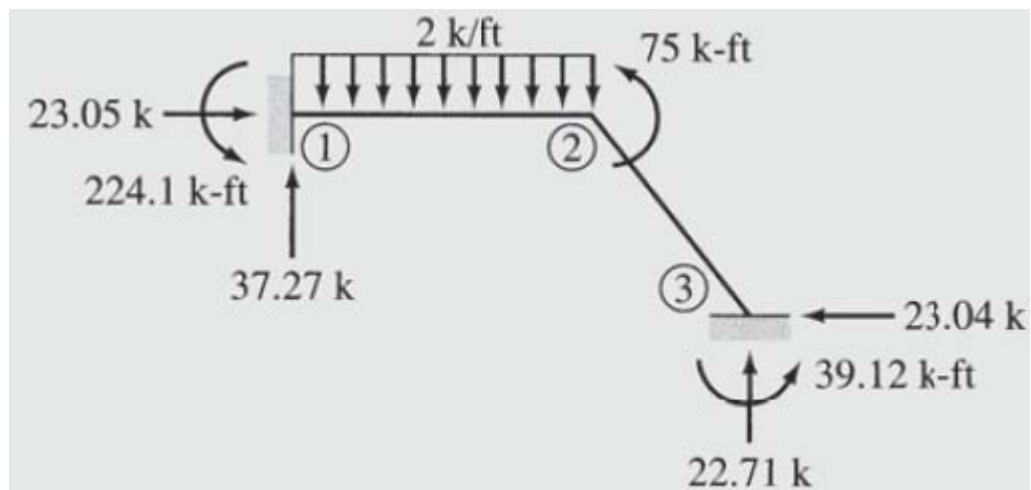
Reacciones en los apoyos

Como las uniones 1 y 3 son los nodos de inicio de los miembros 1 y 2, los vectores de reacciones R_1 y R_3 deben ser igual a las mitades superiores de F_1 y F_2 , respectivamente.

$$F_1 = Q_1 = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \\ -23.05 \text{ k} \\ 22.73 \text{ k} \\ -6.08 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

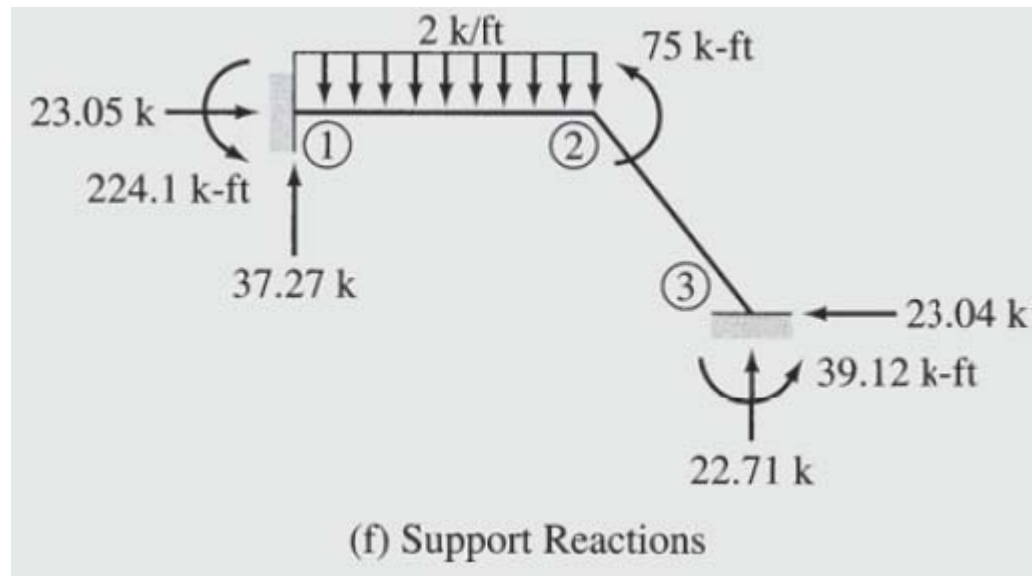
$$F_2 = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ 23.04 \text{ k} \\ -22.71 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

$$R_{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \end{bmatrix}, \quad R_{\textcircled{3}} = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$



(f) Support Reactions

Revisión del Equilibrio



$+\rightarrow \sum F_X = 0$	$23.05 - 23.04 = 0.01 \approx 0$	Checks
$+\uparrow \sum F_Y = 0$	$37.27 - 2(30) + 22.71 = -0.02 \approx 0$	Checks
$+\zeta \sum M_{\textcircled{1}} = 0$	$224.1 - 2(30)(15) + 75 - 23.04(20) + 22.71(45) + 39.12$ $= -0.63 \approx 0$	Checks