Métodos de Trabajo y Energía para el Cálculo de las Deflexiones

Introducción

Por el **Principio de la Conservación de la Energía**, el trabajo llevado a cabo por un sistema de fuerzas aplicadas en una estructura es igual a la energía de deformación almacenada en la estructura. Si las cargas se aplican *lentamente*, no se desarrolla energía cinética ni calor.

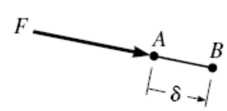
El trabajo es el producto de una fuerza por un desplazamiento. Examinaremos:

- El trabajo hecho por una fuerza o momento
- La derivación de la energía almacenada por una barra cargada axialmente y por una viga
- El método del trabajo real
- El método del trabajo virtual

Trabajo

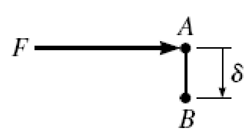
El **trabajo** se define como el producto de una fuerza veces el desplazamiento en la dirección de la fuerza. Si la fuerza permanece *constante* así como se desplaza desde un punto A hasta un punto B, el trabajo W se puede expresar como:

$$W = F\delta$$



Donde δ es la componente del desplazamiento **en** la dirección de la fuerza. El trabajo es **positivo** cuando la fuerza y el desplazamiento van en la **misma** dirección, y negativo cuando las direcciones son opuestas.

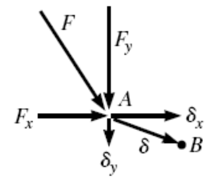
Cuando la fuerza se mueve **perpendicular** a su línea de acción, el trabajo es cero.



Si la magnitud y la dirección de la fuerza permanecen **constantes** así como la fuerza se mueva a través de un desplazamiento δ que no sea colineal con la línea de acción de la fuerza, el trabajo total se evalúa sumando el trabajo hecho por cada componente de la fuerza moviéndose a través de su respectivo desplazamiento colineal, δ_x y δ_y.

En la siguiente figura, la fuerza inclinada F se desplaza de A a B. La fuerza inclinada se puede sustituir por una componente vertical y una horizontal. La horizontal se desplazará δ_x y la vertical δ_y. Entonces, el trabajo hecho por la fuerza será:

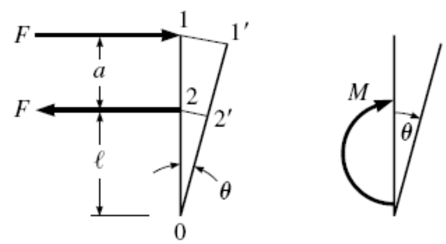
$$W = F_x\delta_x + F_y\delta_y$$



Similarmente, si un momento permanece constante, así como se le dé un desplazamiento (angular) θ, el trabajo hecho es igual a:

$$W = M\theta$$

El trabajo hecho por un par se puede derivar sumando el trabajo hecho por cada fuerza F en la siguiente figura:



(La línea vertical es la original, y se gira a la posición inclinada por un momento a favor del reloj).

El movimiento es en forma de arco circular, durante el desplazamiento angular θ.

$$W = -F_2\ell\theta + F_1(\ell + a)\theta$$

F_2 representa a la fuerza que va del punto 2 al 2'. Su trabajo es negativo porque la dirección de la fuerza es contraria a la del desplazamiento. Igualmente, sabemos que $F_2 = F_1$.

$$W = -F\ell\theta + F\ell\theta + Fa\theta$$

$$W = Fa\theta$$

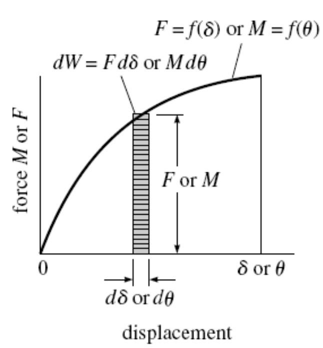
Y como un momento es una fuerza por una distancia:

$$M = Fa$$

El trabajo efectuado es:

$$W = M\theta$$

Si la fuerza varía de magnitud durante el desplazamiento, y si se conoce la relación entre la fuerza F y el desplazamiento colineal δ, el trabajo se puede evaluar por integración.



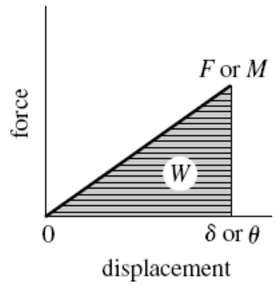
Gráficamente, el desplazamiento se divide en pequeños incrementos de tamaño $d\delta$. El incremento de trabajo dW asociado con cada desplazamiento infinitesimal $d\delta$ es igual al producto $Fd\delta$. El trabajo total se evalúa sumando todos los incrementos:

$$W = \int_0^{\delta} F\, d\delta$$

Igualmente, para un momento variable que se desplaza una serie de desplazamientos angulares infinitesimales $d\theta$, el trabajo total es:

$$W = \int_0^{\theta} M\, d\theta$$

Si la variación de la fuerza es lineal respecto al desplazamiento…



… el trabajo se puede representar por el área debajo de la curva $F\delta$. Gráficamente, el resultado de integrar sería el área del triángulo:

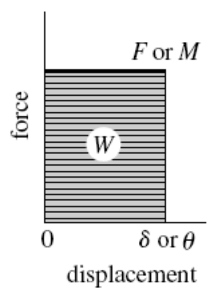
$$W = \frac{1}{2}F\delta$$

Análogamente,

$$W = \frac{1}{2}M\theta$$

Donde F y M son los valores máximos de fuerza y momento, y δ y θ son los desplazamientos totales lineales o rotacionales.

Si la relación $F\delta$ o $M\theta$ es lineal…



… sólo poseeremos el área de un rectángulo y el trabajo será:

$$W = F\delta$$

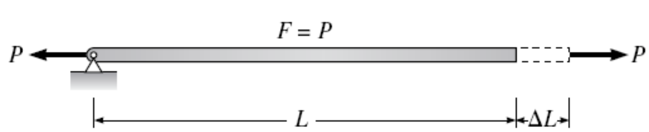
$$W = M\theta$$

(Sin el término de 1/2).

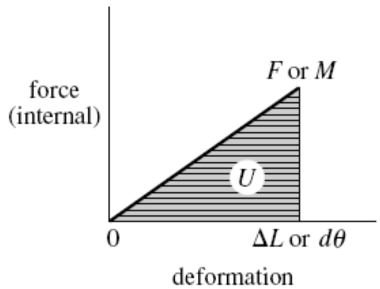
Energía de Deformación

Armaduras

Cuando una barra se carga axialmente, se deforma y almacena energía de deformación U.



La carga externa P induce una fuerza axial F de igual magnitud. Si la barra se comporta elásticamente (aplica la Ley de Hooke), la magnitud de la energía de deformación U almacenada en la barra por una fuerza que aumenta linealmente desde cero hasta su valor final F, así como la barra sufre un cambio de longitud ΔL equivale a:



$$U = \frac{1}{2} F \Delta L$$

Donde, según la mecánica de materiales:

$$\Delta L = \frac{FL}{AE}$$

L = longitud de la barra.

F = valor final de la fuerza axial.

A = área de la sección transversal de la barra.

E = módulo elástico.

Combinando las últimas dos expresiones:

$$U = \frac{F^2 L}{2AE}$$

Si la magnitud de la fuerza axial permanece constante así como la barra sufra un cambio de longitud ΔL debido a algún efecto externo, como un cambio en la temperatura, la energía de deformación almacenada en el miembro sería:

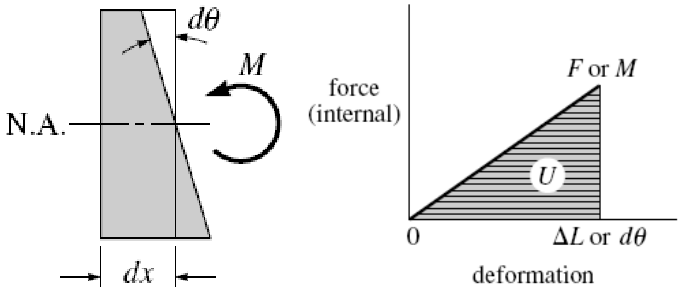
$$U = F \Delta L$$

(Sin el 1/2).

La energía en un cuerpo se puede representar gráficamente. Si usted grafica la curva $F\Delta L$, el área bajo ella será la energía de deformación U almacenada en el miembro.

Vigas

El aumento en la energía de deformación dU almacenada en un segmento de viga de longitud infinitesimal dx por un momento M que aumenta linealmente desde cero hasta un valor final M, así como los lados del segmento rotan a través de un ángulo $d\theta$ es igual a:



$$dU = \frac{1}{2}Md\theta$$

Como se ha demostrado anteriormente,

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

Combinando las expresiones:

$$dU = \frac{M^2}{2EI}dx$$

Que representa el incremento de energía de deformación almacenada en un segmento de viga de longitud dx. Para evaluar la energía total de deformación almacenada en una viga de EI constante, la energía se debe sumar para todos los segmentos infinitesimales integrando ambos lados de la última ecuación.

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$$

Para integrar esta ecuación, el momento M se debe expresar en términos de las cargas aplicadas y la distancia x a lo largo del claro. En cada sección donde la carga cambie, se requiere una nueva expresión para el momento. Si el momento de inercia I varía a lo largo del eje del miembro, también se deberá dejar expresado en función de x.

Si el momento M permanece constante así como un segmento de viga se vea sometido a una rotación $d\theta$ debida a *otro efecto*, el aumento en la energía de deformación almacenada en el elemento equivale a:

$$dU = Md\theta$$

Cuando la rotación anterior $d\theta$ se produce por un momento de magnitud M_P (debida a las cargas P), y retomando la ecuación…

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

… podemos expresar la diferencia de trabajo como:

$$dU = \frac{MM_P}{EI}dx$$

Trabajo Real

Por el principio de la conservación de la energía:

$$W = U$$

Donde W es el trabajo hecho por la fuerza externa aplicada a la estructura, y U es la energía de deformación almacenada en los miembros esforzados de la estructura. Como una única ecuación permite la solución sólo para una única variable, **esta ecuación sólo se puede aplicar para estructuras que estén cargadas por una sola fuerza**.

Combinando:

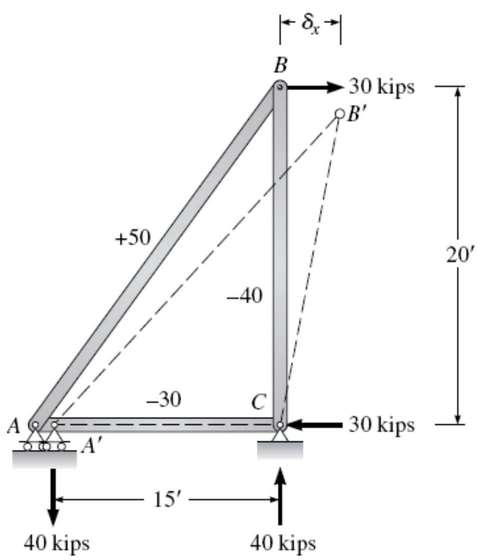
$$W = \frac{1}{2}F\delta$$

$$U = \frac{F^2L}{2AE}$$

$$\frac{P}{2}\delta = \sum \frac{F^2L}{2AE}$$

Donde $F = P$ es colineal con δ, y la sumatoria implica que se debe agregar la energía de todas las barras.

Ejemplo



Usando el método del trabajo real, encuentre la deflexión horizontal δ_x de la junta B. Para todas las barras, $A = 2.4\ \mathrm{in}^2$ y $E = 30{,}000\ \mathrm{ksi}$. La forma deformada se muestra por líneas discontinuas.

Solución. Como la carga aplicada $P = 30\ \mathrm{kips}$ actúa en la dirección del desplazamiento requerido, el método del trabajo real es válido.

Los valores de las fuerzas en las barras se muestran en la figura. Si tenemos una carga de 30 a una altura de 20, ocasiona un momento de $30(20) = 600$, el cual se contrarresta con las reacciones: $R * 15 = 600 \rightarrow R = 40$. La fuerza de 30 gira a favor del reloj, por lo que el par de las reacciones debe girar en contra. Por suma de fuerzas en x, la reacción en la articulación es de 30 hacia la izquierda.

En el nodo C, el 100% de la carga vertical se debe tomar por la barra vertical, y el 100% de la carga horizontal se debe tomar por la barra horizontal. Así, la fuerza en la barra AC debe ser igual a 30 (compresión), y en la barra BC debe ser igual a 40 de compresión. Si tenemos un triángulo 3, 4, 5 (o bien, las fuerzas de 30 y 40), la fuerza en la barra restante deberá de ser de 50. Por inspección, sabemos que estará a tensión al verse jalada por la carga de 30 en B.

Como se ve de la configuración deformada, la junta B también se desplaza verticalmente, sin embargo, con el método del trabajo real no se puede encontrar este desplazamiento porque no hay fuerza que actúe en la dirección vertical. Afortunadamente, con el método del trabajo virtual podremos vencer esta limitación.

Aplicando la fórmula:

$$\frac{30}{2}\delta_x = \frac{(50)^2(25)(12)}{2(2.4)(30{,}000)} + \frac{(-40)^2(20)(12)}{2(2.4)(30{,}000)} + \frac{(-30)^2(15)(12)}{2(2.4)(30{,}000)} \rightarrow \delta_x = 0.6\ \mathrm{in}\ (\rightarrow)$$

Trabajo Virtual

El método del trabajo virtual es un procedimiento para calcular componentes individuales de la deflexión en cualquier punto de una estructura. Este método permite incluir en los cálculos de las deflexiones la influencia de los asentamientos de los apoyos, cambios en la temperatura y errores de fabricación.

Para calcular la componente de la deflexión por el método del trabajo virtual, el diseñador aplica una fuerza en el punto y la dirección del desplazamiento deseado. Llamaremos a esta fuerza "carga virtual", porque el desplazamiento que sufrirá es producido por otros efectos, como la carga real, cambios de temperatura, asentamientos, etcétera. Las cargas virtuales y las fuerzas internas que genere se denominarán *sistema Q*. Típicamente esta carga valdrá 1.

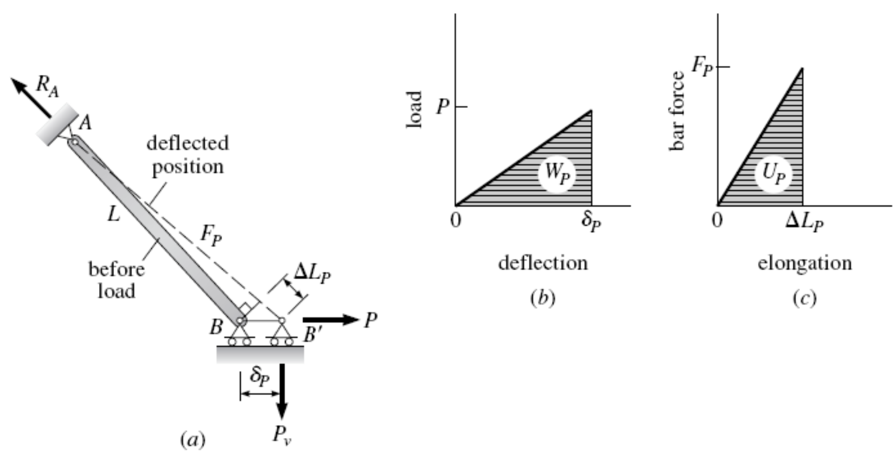
Con la carga virtual en posición, las cargas reales, denominadas *sistema P*, se aplican a la estructura. Conforme la estructura se deforma ante las cargas reales, un *trabajo virtual externo*, W_Q es realizado por la carga virtual cuando se mueve un desplazamiento real de la estructura. Con el principio de la conservación de la energía, una energía de deformación virtual, U_Q se almacenará en la estructura:

$$W_Q = U_Q$$

La energía de deformación almacenada en la estructura es igual a la contribución de las fuerzas internas producidas por la carga virtual y las distorsiones de los elementos producidas por las cargas reales.

Armaduras

Apliquemos el método del trabajo virtual a una armadura conformada por sólo una barra.



Queremos obtener el desplazamiento **horizontal** del rodillo en B.

La barra, que únicamente soporta carga axial tiene un área de sección transversal A, y un módulo elástico E.

En la figura se muestra la elongación de la barra ΔL_P debida a la fuerza real F_P así como el desplazamiento horizontal δ_P.

La barra se elonga:

$$\Delta L_P = \frac{F_P L}{AE}$$

Podemos expresar el trabajo real como:

$$W_P = \frac{1}{2} P \delta_P$$

Aunque la reacción vertical P_v existe en B, no hace trabajo al desplazarse el rodillo porque actúa perpendicularmente al desplazamiento horizontal del nodo B. Si graficamos la curva $P - \delta_P$, él área debajo de ella es el trabajo real. Como resultado del trabajo real hecho por P, una energía de deformación U_P de igual magnitud se almacena en la barra AB.

Como habíamos dicho:

$$U = \frac{F}{2}\Delta L$$

Y entonces podemos expresar la energía de deformación como:

$$U_P = \frac{1}{2}F_P\Delta L_P$$

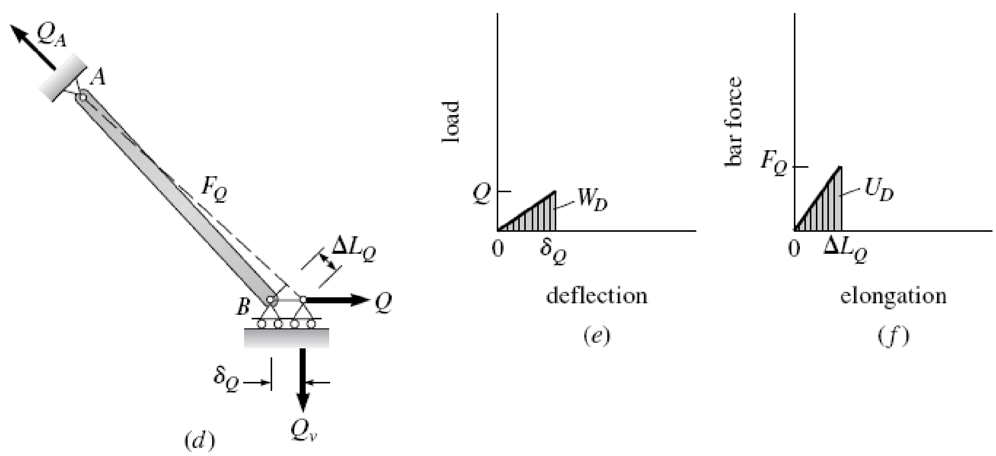
Por la conservación de la energía:

$$W_P = U_P$$

$$\frac{1}{2}P\delta_P = \frac{1}{2}F_P\Delta L_P$$

Y las áreas de los diagramas deben ser iguales.

Igualmente, para la carga virtual Q:



El trabajo *real* debido a la carga virtual lo nombraremos W_D.

$$W_D = \frac{1}{2}Q\delta_Q$$

La energía de deformación almacenada en la barra cuando se elonga es igual a:

$$U_D = \frac{1}{2}F_Q\Delta L_Q$$

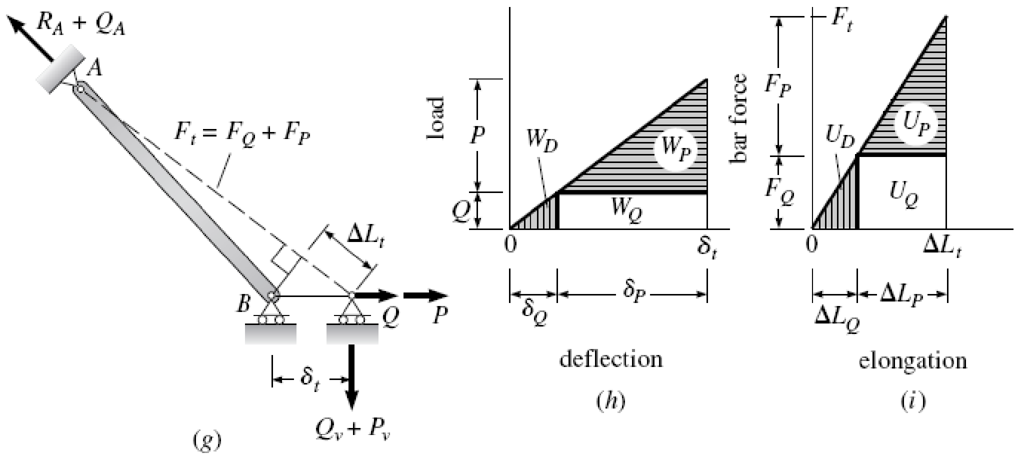
Y:

$$W_D = Q_D$$

$$\frac{1}{2}Q\delta_Q = \frac{1}{2}F_Q\Delta L_Q$$

Ahora consideremos el trabajo hecho en la energía de deformación almacenada en la barra aplicando de manera secuencial primero la carga virtual Q, y luego la carga real P.

Como el comportamiento es elástico, el principio de superposición precisa que las deformaciones, fuerzas en las barras y reacciones finales sean igual a la suma de aquellas producidas por Q y por P actuando por separado.



La figura (h) muestra el trabajo total W_T hecho por las fuerzas Q y P así como el punto B se desplaza una cantidad $\delta_T = \delta_Q + \delta_P$. La figura (i) muestra la energía total de deformación U_T almacenada en la estructura por la acción de las fuerzas Q y P.

Quedamos con tres áreas:

1. $W_D = U_D$
2. $W_P = U_P$
3. $W_Q = U_Q$

Por lo tanto $W_T = U_T$. Como el área W_Q es rectangular, podemos decir: $W_Q = Q(\delta_P)$. Q es la magnitud de la carga virtual y δ_P es la componente del desplazamiento en la dirección de Q producida por el sistema real P. Igualmente, $U_Q = F_Q(\Delta L_P)$. F_Q es la fuerza virtual en las barras producida por la carga virtual Q y ΔL_P es el cambio de longitud en la barra debido al sistema P. Combinando:

$$W_Q = U_Q$$

$$Q \cdot \delta_P = F_Q \cdot \Delta L_P$$

De aquí establecemos la ecuación general del trabajo virtual para cualquier tipo de armadura:

$$\Sigma Q\delta_P = \Sigma F_Q \Delta L_P$$

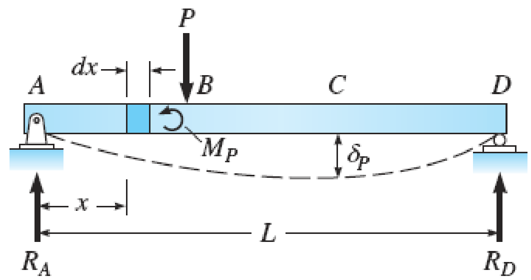
El signo de sumatoria de la izquierda implica que, en ciertos casos, más de una fuerza externa Q contribuye al trabajo virtual. El signo de sumatoria de la derecha implica que la mayoría de las armaduras poseen más de una barra.

La última ecuación también muestra que tanto fuerzas internas como externas son suministradas por el sistema Q, y que los desplazamientos y las deformaciones de la estructura están suministrados por el sistema P. Cuando las deformaciones de las barras son producidas por cargas, expresamos las deformaciones ΔL_P en función de las fuerzas de las barras F_P y las propiedades de los miembros:

$$\boxed{\Sigma Q\delta_P = \Sigma F_Q \frac{F_P L}{AE}}$$

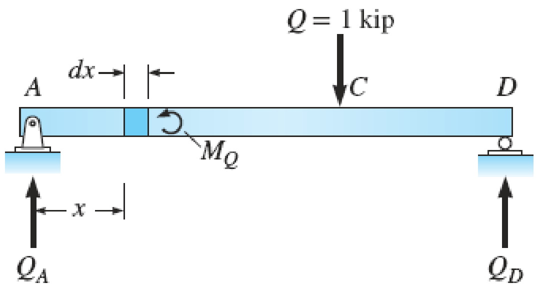
Vigas y Marcos

El procedimiento para calcular la deflexión de una viga por el trabajo virtual es similar al de una armadura, excepto que la expresión de energía de deformación es obviamente diferente. El analista aplica una carga virtual Q en el punto donde desee evaluar la deflexión.

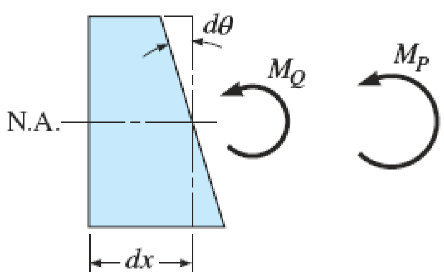


Para calcular la deflexión en el punto C de esta viga, se aplica una carga virtual de 1 kip en ese mismo lugar. La carga virtual genera un momento M_Q en un elemento típico infinitesimal de longitud dx de viga.

Con la carga (virtual) en posición, se aplican las cargas reales (sistema P) en la viga. Los momentos M_P doblan a la viga hacia su posición de equilibrio.



También se muestra un corto segmento de la viga obtenido del miembro sin esforzar, delimitado por dos planos verticales separados una distancia d_x. El elemento se posiciona a una distancia x desde el apoyo A. Así como las fuerzas del sistema P aumentan, los lados del elemento rotan un ángulo $d\theta$ debido a los momentos M_P. Despreciando las deformaciones de cortante (que son bajas en vigas de bajo peralte), asumimos que las secciones planas *antes* de la flexión permanecen planas *después* de la flexión, y por lo tanto, las deformaciones longitudinales en el elemento varían linealmente desde el eje neutro de la sección transversal. Podemos expresar $d\theta$ como:



$$d\theta = M_P \frac{dx}{EI}$$

Conforme la viga se deflexiona, trabajo virtual externo W_Q se efectúa por la carga virtual Q que se mueve una distancia igual al desplazamiento real δ_P en la dirección de la carga virtual y podemos escribir:

$$W_Q = \Sigma Q\delta_P$$

La energía virtual de deformación dU_Q se almacena en cada elemento infinitesimal así como el momento de M_Q se mueve a través del ángulo $d\theta$ producido por el sistema P. Entonces, también podemos escribir:

$$dU_Q = M_Q d\theta$$

Para establecer la magnitud de la energía de deformación virtual total U_Q almacenada en la viga, debemos sumar (típicamente por integración) la energía contenida en todos los elementos infinitesimales de la viga. Tendríamos:

$$U_Q = \int_{x=0}^{x=L} M_Q \, d\theta$$

Y ya que el principio de la conservación de la energía requiere que el trabajo virtual externo W_Q sea igual a la energía virtual de deformación U_Q podemos igualarlos y conseguir la ecuación básica de trabajo virtual para vigas:

$$\Sigma Q\delta_P = \int_{x=0}^{x=L} M_Q \, d\theta$$

Y empleando $d\theta$ en función del momento M_P y las propiedades de la sección transversal, obtenemos:

$$\boxed{\Sigma Q\delta_P = \int_{x=0}^{x=L} M_Q \frac{M_P dx}{EI}}$$

Donde Q es la carga virtual y sus reacciones, δ_P es el desplazamiento real o componente del desplazamiento en la dirección de la carga virtual producida por las cargas reales (el sistema P), M_Q es el momento producido por la carga virtual, M_P es el momento producido por la carga real, E es el módulo elástico e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto a un eje que pasa a través de su centroide.

Si un momento unitario $Q_M = 1\ \text{kip} \cdot \text{ft}$ se usa como carga virtual para establecer el cambio de pendiente θ_P producido en un punto en el eje de la viga por las cargas reales, el trabajo virtual externo W_Q equivale a $Q_M\theta_P$ y la ecuación del trabajo virtual se escribe como:

$$\boxed{\Sigma Q_M\theta_P = \int_{x=0}^{x=L} M_Q \frac{M_P dx}{EI}}$$

Note que los momentos M_Q y M_P se deben expresar en función de x, la distancia a lo largo del eje de la viga, para que se pueda integrar el lado derecho de la ecuación de trabajo virtual.

Procedimiento Alternativo para Calcular U_Q

Para formas geométricas simples con rigidez a flexión constante, se pueden usar las tablas de “Valores del Producto de Integrales”, que se explicará en algunos ejemplos.