

Ejercicio

Determine los desplazamientos de los nodos, las fuerzas locales en los extremos de los miembros y las reacciones para el marco plano mostrado en la figura, debido al efecto combinado de lo siguiente: (a) la carga mostrada la figura; (b) una rotación a favor del reloj de 0.017 radianes en el apoyo de la izquierda; (c) un asentamiento de 3/4 in en el apoyo de la derecha.

Emplee el Método Matricial de las Rigideces.

Número de grados de libertad: 6
 Número de grados restringidos: 6

Unidades: kips y pulgadas.

0. Información de entrada

0.1 Geometría

$$A := \begin{bmatrix} 80 \\ 108 \\ 80 \end{bmatrix} \text{ in}^2 \quad E := \begin{bmatrix} 4500 \\ 4500 \\ 4500 \end{bmatrix} \text{ ksi} \quad I := \begin{bmatrix} 550 \\ 1300 \\ 550 \end{bmatrix} \text{ in}^4 \quad x := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \cdot 12 \\ 25 \cdot 12 & 25 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 300 \\ 300 & 300 \end{bmatrix} \text{ in}$$

$$y := \begin{bmatrix} 0 & 20 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 & 20 \cdot 12 \\ 0 & 20 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 240 \\ 240 & 240 \\ 0 & 240 \end{bmatrix} \text{ in} \quad L := \begin{bmatrix} 20 \cdot 12 \\ 25 \cdot 12 \\ 20 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 300 \\ 240 \end{bmatrix} \text{ in}$$

0.2 Cargas

$$\frac{2 \frac{\text{kip}}{\text{ft}} \cdot (25 \text{ ft})^2}{12} = 1250 \text{ kip in}$$

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kip} \quad V := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2 \cdot 25}{2} & \frac{2 \cdot 25}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kip} \quad M := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 \cdot 25^2 & -2 \cdot 25^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1250 & -1250 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kip in}$$

0.3 Fórmulas

☐ — Fórmulas

$$k(n) := \frac{E_n \cdot I_n}{L_n^3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 & -\frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot L_n & 0 & -12 & 6 \cdot L_n \\ 0 & 6 \cdot L_n & 4 \cdot (L_n)^2 & 0 & -6 \cdot L_n & 2 \cdot (L_n)^2 \\ -\frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 & \frac{A_n \cdot (L_n)^2}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \cdot L_n & 0 & 12 & -6 \cdot L_n \\ 0 & 6 \cdot L_n & 2 \cdot (L_n)^2 & 0 & -6 \cdot L_n & 4 \cdot (L_n)^2 \end{bmatrix} \quad Q_f(n) := \begin{bmatrix} N_{n1} \\ V_{n1} \\ M_{n1} \\ N_{n2} \\ V_{n2} \\ M_{n2} \end{bmatrix}$$

$$T(n) := \begin{bmatrix} \coseno(n) & \text{seno}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{seno}(n) & \coseno(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \coseno(n) & \text{seno}(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{seno}(n) & \coseno(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \text{seno}(n) &:= \frac{Y_n 2^{-Y_n 1}}{L_n} \\ \coseno(n) &:= \frac{x_n 2^{-x_n 1}}{L_n} \end{aligned}$$

$$K(n) := T(n)^T \cdot k(n) \cdot T(n) \quad F_f(n) := T(n)^{-1} \cdot Q_f(n)$$

1. Matrices de rigidez de las barras **Problema 6.11** **Problema 6.28** **Problema 6.20**

$$k_1 := k(1) = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & -1500 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1484 & 257.8125 & 0 & -2.1484 & 257.8125 \\ 0 & 257.8125 & 41250 & 0 & -257.8125 & 20625 \\ -1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & -2.1484 & -257.8125 & 0 & 2.1484 & -257.8125 \\ 0 & 257.8125 & 20625 & 0 & -257.8125 & 41250 \end{bmatrix} \quad T_1 := T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[7 8 9 1 2 3]

$$K_1 := K(1) = \begin{bmatrix} 2.1484 & 0 & -257.8125 & -2.1484 & 0 & -257.8125 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & -1500 & 0 \\ -257.8125 & 0 & 41250 & 257.8125 & 0 & 20625 \\ -2.1484 & 0 & 257.8125 & 2.1484 & 0 & 257.8125 \\ 0 & -1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 \\ -257.8125 & 0 & 20625 & 257.8125 & 0 & 41250 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 := k(2) = \begin{bmatrix} 1620 & 0 & 0 & -1620 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6 & 390 & 0 & -2.6 & 390 \\ 0 & 390 & 78000 & 0 & -390 & 39000 \\ -1620 & 0 & 0 & 1620 & 0 & 0 \\ 0 & -2.6 & -390 & 0 & 2.6 & -390 \\ 0 & 390 & 39000 & 0 & -390 & 78000 \end{bmatrix} \quad T_2 := T(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[1 2 3 4 5 6]

$$K_2 := K(2) = \begin{bmatrix} 1620 & 0 & 0 & -1620 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6 & 390 & 0 & -2.6 & 390 \\ 0 & 390 & 78000 & 0 & -390 & 39000 \\ -1620 & 0 & 0 & 1620 & 0 & 0 \\ 0 & -2.6 & -390 & 0 & 2.6 & -390 \\ 0 & 390 & 39000 & 0 & -390 & 78000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$k_3 := k(3) = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & -1500 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1484 & 257.8125 & 0 & -2.1484 & 257.8125 \\ 0 & 257.8125 & 41250 & 0 & -257.8125 & 20625 \\ -1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & -2.1484 & -257.8125 & 0 & 2.1484 & -257.8125 \\ 0 & 257.8125 & 20625 & 0 & -257.8125 & 41250 \end{bmatrix} \quad T_3 := T(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[10 11 12 4 5 6]

$$K_3 := K(3) = \begin{bmatrix} 2.1484 & 0 & -257.8125 & -2.1484 & 0 & -257.8125 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & -1500 & 0 \\ -257.8125 & 0 & 41250 & 257.8125 & 0 & 20625 \\ -2.1484 & 0 & 257.8125 & 2.1484 & 0 & 257.8125 \\ 0 & -1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 \\ -257.8125 & 0 & 20625 & 257.8125 & 0 & 41250 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Solución del sistema

$$d := S^{-1} \cdot (P - P_f) = \begin{bmatrix} 8.6897 \\ -0.0093 \\ -0.0298 \\ 8.678 \\ -0.024 \\ 0.0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6. Fuerzas en los extremos de los miembros y sus desplazamientos Problema 6.48

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.6897 \\ -0.0093 \\ -0.0298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_1 := T(1) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0093 \\ -8.6897 \\ -0.0298 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 := k_1 \cdot u_1 + Q_{f1} = \begin{bmatrix} 13.9751 \\ 10.992 \\ 1626.1291 \\ -13.9751 \\ -10.992 \\ 1011.9447 \end{bmatrix} \quad F_1 := K_1 \cdot v_1 + F_{f1} = \begin{bmatrix} -10.992 \\ 13.9751 \\ 1626.1291 \\ 10.992 \\ -13.9751 \\ 1011.9447 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6897 \\ -0.0093 \\ -0.0298 \\ 8.678 \\ -0.024 \\ 0.0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad u_2 := T(2) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 8.6897 \\ -0.0093 \\ -0.0298 \\ 8.678 \\ -0.024 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

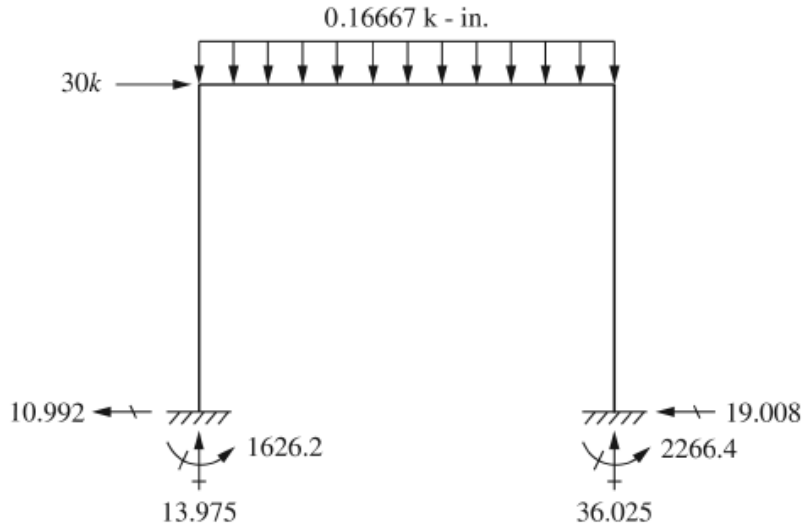
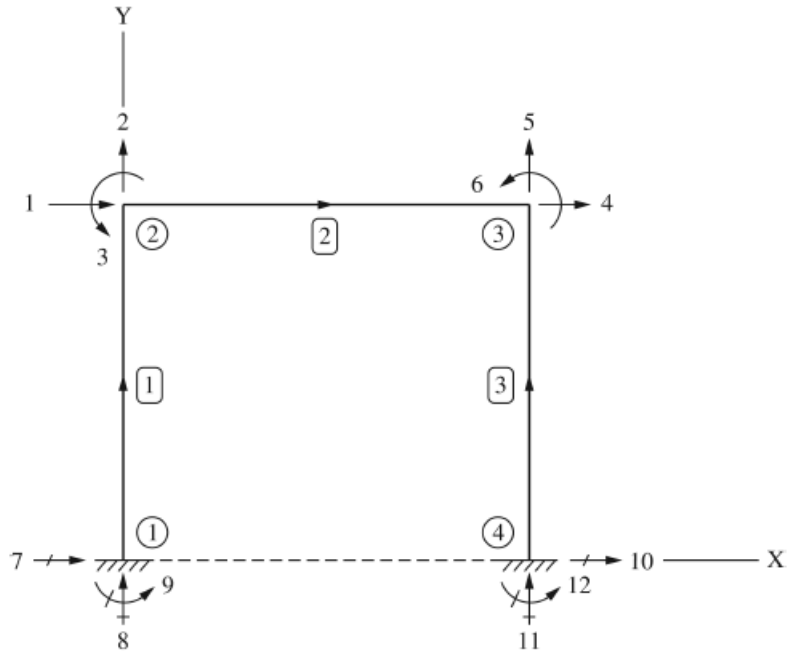
$$Q_2 := k_2 \cdot u_2 + Q_{f2} = \begin{bmatrix} 19.008 \\ 13.9751 \\ -1011.9447 \\ -19.008 \\ 36.0249 \\ -2295.5213 \end{bmatrix} \quad F_2 := K_2 \cdot v_2 + F_{f2} = \begin{bmatrix} 19.008 \\ 13.9751 \\ -1011.9447 \\ -19.008 \\ 36.0249 \\ -2295.5213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.678 \\ -0.024 \\ 0.0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad u_3 := T(3) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.024 \\ -8.678 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 := k_3 \cdot u_3 + Q_{f3} = \begin{bmatrix} 36.0249 \\ 19.008 \\ 2266.4049 \\ -36.0249 \\ -19.008 \\ 2295.5213 \end{bmatrix} \quad F_3 := K_3 \cdot v_3 + F_{f3} = \begin{bmatrix} -19.008 \\ 36.0249 \\ 2266.4049 \\ 19.008 \\ -36.0249 \\ 2295.5213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

7. Reacciones **Problema 6.48**

$$R := \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.992 \\ 13.9751 \\ 1626.1291 \\ -19.008 \\ 36.0249 \\ 2266.4049 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$



Problema 6.48

En el PDF de este documento se adjunta una imagen en SAP2000 con los diagramas de fuerzas axiales, cortantes y momentos flexionantes así como las reacciones.