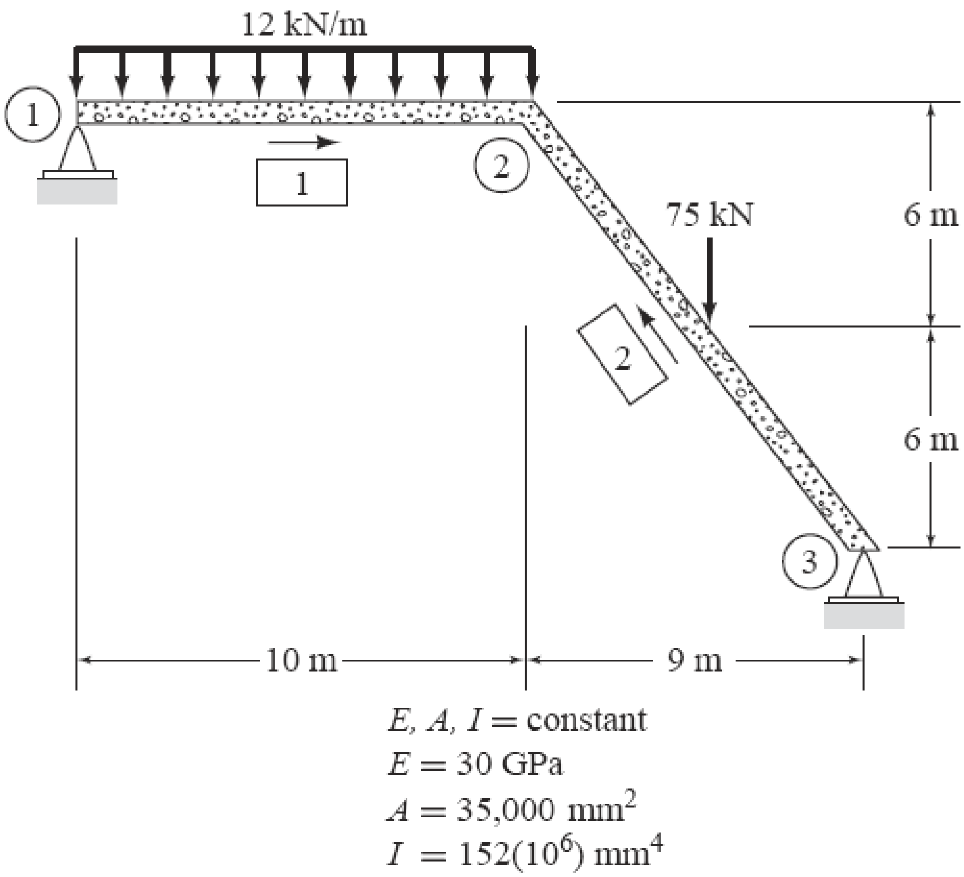
723



Asentamientos y Liberaciones

Resuelva el marco de la izquierda para las cargas mostradas y un asentamiento de 50 mm del apoyo derecho.

Encuentre los desplazamientos en los nodos, las fuerzas locales en los miembros y las reacciones en los apoyos.

Modele al miembro horizontal como articulado en su extremo izquierdo y al inclinado como articulado en su extremo más bajo.

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 19 & 10 \end{bmatrix} \; m$$

$$y := \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \; m$$

$$E := \begin{bmatrix} 30 \cdot 10^6 \\ 30 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \; kPa$$

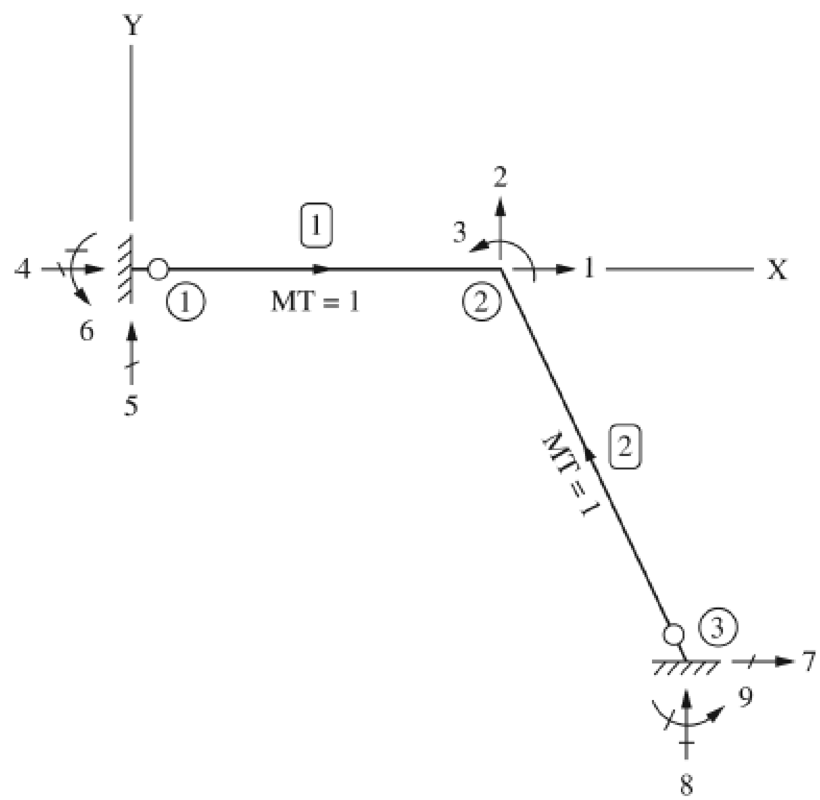
$$A := \begin{bmatrix} \dfrac{35000}{1000^2} \\ \dfrac{35000}{1000^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.035 \\ 0.035 \end{bmatrix} \; m^2$$

$$I := \begin{bmatrix} \dfrac{152 \cdot 10^6}{1000^4} \\ \dfrac{152 \cdot 10^6}{1000^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0002 \end{bmatrix} \; m^4$$

$$L := \begin{bmatrix} 10 \\ \sqrt{9^2 + 12^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \; m$$

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 30 \end{bmatrix} \; kN$$

$$V := \begin{bmatrix} \dfrac{12 \cdot 10}{2} & \dfrac{12 \cdot 10}{2} \\ -\dfrac{45}{2} & -\dfrac{45}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 60 \\ -22.5 & -22.5 \end{bmatrix} \; {}^{*} kN$$



$$M := \begin{bmatrix} \dfrac{12 \cdot 10^2}{12} & -\dfrac{12 \cdot 10^2}{12} \\ -\dfrac{45 \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}}{8} & \dfrac{45 \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -84.375 & 84.375 \end{bmatrix} \; {}^{*} kN\, m$$

* Cuidado con los signos. Se ven "al revés" por el sentido de la viga.

Fórmulas

$$k_{inicioArticulado}(n) := \frac{E_n \cdot I_n}{L_n^{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_n \cdot L_n^{2}}{I_n} & 0 & 0 & -\frac{A_n \cdot \left(L_n\right)^{2}}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \cdot L_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_n \cdot \left(L_n\right)^{2}}{I_n} & 0 & 0 & \frac{A_n \cdot \left(L_n\right)^{2}}{I_n} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3 \cdot L_n \\ 0 & 3 \cdot L_n & 0 & 0 & -3 \cdot L_n & 3 \cdot L_n^{2} \end{bmatrix} \qquad Q_{fInicioArticulado}(n) := \begin{bmatrix} N_{n\,1} \\ V_{n\,1} - \frac{3}{2 \cdot L_n} \cdot M_{n\,1} \\ 0 \\ N_{n\,2} \\ V_{n\,2} + \frac{3}{2 \cdot L_n} \cdot M_{n\,1} \\ M_{n\,2} - \frac{1}{2} \cdot M_{n\,1} \end{bmatrix}$$

$$seno(n) := \frac{y_{n\,2} - y_{n\,1}}{L_n} \qquad coseno(n) := \frac{x_{n\,2} - x_{n\,1}}{L_n}$$

$$T(n) := \begin{bmatrix} coseno(n) & seno(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -seno(n) & coseno(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & coseno(n) & seno(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -seno(n) & coseno(n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de rigidez de las barras

$$k_1 := k_{inicioArticulado}(1) = \begin{bmatrix} 1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 & -1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 13.68 & 0 & 0 & -13.68 & 136.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 & 1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & -13.68 & 0 & 0 & 13.68 & -136.8 \\ 0 & 136.8 & 0 & 0 & -136.8 & 1368 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_1 := T(1)^{T} \cdot k_{inicioArticulado}(1) \cdot T(1) = \begin{bmatrix} 1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 & -1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 13.68 & 0 & 0 & -13.68 & 136.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 & 1.05 \cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & -13.68 & 0 & 0 & 13.68 & -136.8 \\ 0 & 136.8 & 0 & 0 & -136.8 & 1368 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f1} := Q_{fInicioArticulado}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 75 \\ -150 \end{bmatrix} \qquad F_{f1} := T(1)^{-1} \cdot Q_{fInicioArticulado}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 75 \\ -150 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 := k_{inicioArticulado}(2) = \begin{bmatrix} 70000 & 0 & 0 & -70000 & 0 & 0 \\ 0 & 4.0533 & 0 & 0 & -4.0533 & 60.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -70000 & 0 & 0 & 70000 & 0 & 0 \\ 0 & -4.0533 & 0 & 0 & 4.0533 & -60.8 \\ 0 & 60.8 & 0 & 0 & -60.8 & 912 \end{bmatrix}$$

$$K_2 := T(2)^T \cdot k_{inicioArticulado}(2) \cdot T(2)$$

$$K_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 25202.5941 & -33598.0544 & 0 & -25202.5941 & 33598.0544 & -48.64 \\ -33598.0544 & 44801.4592 & 0 & 33598.0544 & -44801.4592 & -36.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25202.5941 & 33598.0544 & 0 & 25202.5941 & -33598.0544 & 48.64 \\ 33598.0544 & -44801.4592 & 0 & -33598.0544 & 44801.4592 & 36.48 \\ -48.64 & -36.48 & 0 & 48.64 & 36.48 & 912 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{f2} := Q_{fInicioArticulado}(2) = \begin{bmatrix} 30 \\ -14.0625 \\ 0 \\ 30 \\ -30.9375 \\ 126.5625 \end{bmatrix} \qquad F_{f2} := T(2)^{-1} \cdot Q_{fInicioArticulado}(2) = \begin{bmatrix} -6.75 \\ 32.4375 \\ 0 \\ 6.75 \\ 42.5625 \\ 126.5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura y vector de fuerzas de extremo fijo

$$S := \begin{bmatrix} K_{1_{4\,4}} + K_{2_{4\,4}} & K_{1_{4\,5}} + K_{2_{4\,5}} & K_{1_{4\,6}} + K_{2_{4\,6}} \\ K_{1_{5\,4}} + K_{2_{5\,4}} & K_{1_{5\,5}} + K_{2_{5\,5}} & K_{1_{5\,6}} + K_{2_{5\,6}} \\ K_{1_{6\,4}} + K_{2_{6\,4}} & K_{1_{6\,5}} + K_{2_{6\,5}} & K_{1_{6\,6}} + K_{2_{6\,6}} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.302 \cdot 10^5 & -33598.0544 & 48.64 \\ -33598.0544 & 44815.1392 & -100.32 \\ 48.64 & -100.32 & 2280 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_{fs2} := \begin{bmatrix} 0 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad F_{fs2} := K_2 \cdot v_{fs2} = \begin{bmatrix} 1679.9027 \\ -2240.073 \\ 0 \\ -1679.9027 \\ 2240.073 \\ 1.824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad P_f := \begin{bmatrix} F_{f1_4} + F_{f2_4} + F_{fs2_4} \\ F_{f1_5} + F_{f2_5} + F_{fs2_5} \\ F_{f1_6} + F_{f2_6} + F_{fs2_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1673.1527 \\ 2357.6355 \\ -21.6135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vector de cargas nodales

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema

$$d := S^{-1} \cdot \left(P - P_f\right) = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0533 \\ 0.0072 \end{bmatrix}$$

Fuerzas y desplazamientos en los extremos de los miembros

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0533 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad u_1 := T(1) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0533 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 := k_1 \cdot u_1 + Q_{f1} = \begin{bmatrix} 94.1715 \\ 46.7075 \\ 0 \\ -94.1715 \\ 73.2925 \\ -132.9252 \end{bmatrix}$$

$$F_1 := K_1 \cdot v_1 + F_{f1} = \begin{bmatrix} 94.1715 \\ 46.7075 \\ 0 \\ -94.1715 \\ 73.2925 \\ -132.9252 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ v_{fs2_2} \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.05 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0533 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := T(2) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.03 \\ 0 \\ -0.0421 \\ 0.0327 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 := k_2 \cdot u_2 + Q_{f2} = \begin{bmatrix} 175.1369 \\ -13.6383 \\ 0 \\ -115.1369 \\ -31.3617 \\ 132.9252 \end{bmatrix}$$

$$F_2 := K_2 \cdot v_2 + F_{f2} = \begin{bmatrix} -94.1715 \\ 148.2925 \\ 0 \\ 94.1715 \\ -73.2925 \\ 132.9252 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reacciones

$$R := \begin{bmatrix} F_{1_1} \\ F_{1_2} \\ F_{1_3} \\ F_{2_1} \\ F_{2_2} \\ F_{2_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94.1715 \\ 46.7075 \\ 0 \\ -94.1715 \\ 148.2925 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$