Vibraciones

26 de noviembre de 2017

Parte I
Vibración libre sin amortiguamiento

Una *vibración* es el movimiento oscilatorio de un cuerpo (o sistema de cuerpos conectados) desplazado desde una posición de equilibrio.

Existen dos tipos de vibración:

- *Vibración libre.* Ocurre cuando se mantiene el movimiento gracias a fuerzas restauradoras (elásticas o gravitatorias).
    - Ejemplo: movimiento de un péndulo; vibración de una barra elástica.
- *Vibración forzada.* Es debida a una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema.

Los dos tipos de vibraciones pueden ser amortiguadas o sin amortiguar.

- *Vibraciones no amortiguadas.* Continúan indefinidamente ya que desprecian los efectos de la fricción en el análisis.
- *Vibración amortiguada.* Considera las fuerzas de fricción internas y externas en los cuerpos ya que así se comportan en realidad.

El tipo más simple de movimiento vibratorio es la **vibración libre no amortiguada**, la cual se representa en la figura 1 (a). El bloque tiene una masa m y está unido a un resorte con rigidez k. El movimiento vibratorio ocurre cuando el bloque se libera desde una posición desplazada x de manera que el resorte lo jale hacia él. El bloque alcanzará cierta velocidad tal que no estará en equilibrio cuando llegue a $x = 0$, y si la superficie de soporte es lisa, la oscilación continuará indefinidamente.

El recorrido del movimiento del bloque (en función del tiempo) se puede determinar aplicando la ecuación del movimiento al bloque cuando se encuentra en su posición desplazada x. El diagrama de cuerpo libre se muestra también en la figura 1 (b). La fuerza elástica restauradora $F = kx$ está dirigida siempre hacia la posición de equilibrio, mientras que la aceleración $\boldsymbol{a}$ se asume que actúa hacia la dirección de *desplazamiento positivo.* Tenemos:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

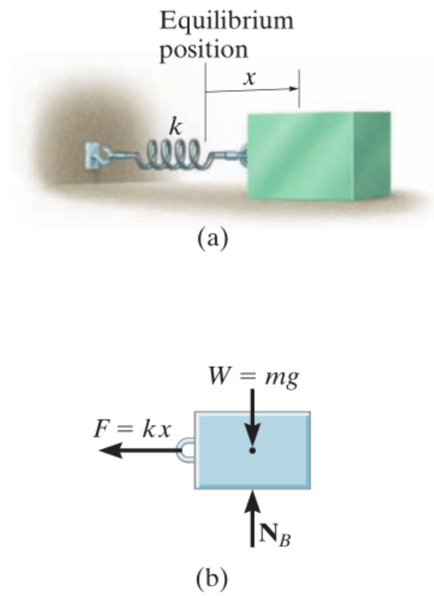


Figura 1: Vibración libre sin amortiguar. Modelo horizontal.

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = ma_x$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

Advierta que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se denomina *movimiento armónico simple*. Reordenando los términos tenemos:

$$0 = m\ddot{x} + kx$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre la masa:

$$0 = \ddot{x} + \frac{k}{m}x$$

Definiendo a ω_n como la *frecuencia circular* o *frecuencia natural*, expresada en radianes por segundo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

Tendremos:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2}$$

La ecuación anterior también puede obtenerse considerando que el bloque está suspendido y midiendo el desplazamiento y desde la *posición de equilibrio* del bloque, figura 2 (a). Cuando

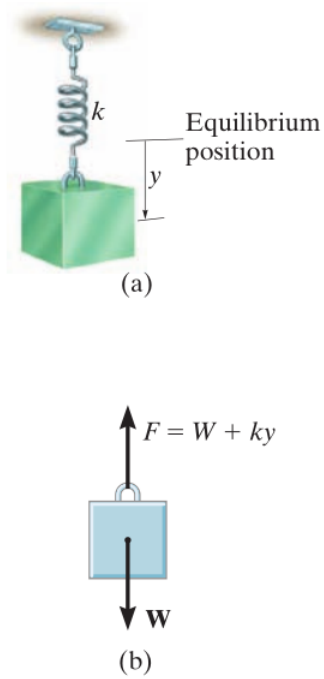


Figura 2: Vibración libre sin amortiguar. Modelo vertical.

el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza hacia arriba $F = W = mg$ sobre el bloque. Por consiguiente, cuando el bloque es desplazado una distancia y hacia abajo desde esta posición, la magnitud de la fuerza del resorte es $F = W + ky$ (ver diagrama de cuerpo libre en la figura 2 (b). Aplicando la ecuación del movimiento resulta:

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y$$

$$-W - ky + W = m\ddot{y}$$

$$-ky = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

Que es la misma ecuación a la obtenida para x.

La ecuación 2 es una ecuación diferencial, lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Se puede demostrar, usando los métodos de las ecuaciones diferenciales, que la solución general es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) \tag{3}$$

donde A y B representan dos constantes de integración. La velocidad y la aceleración del bloque son determinadas derivando sucesivamente, lo que da:

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos(\omega_n t) - B\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \tag{4}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t) - B\omega_n^2 \cos(\omega_n t) \tag{5}$$

Revisión de que se cumple la ecuación 2:

$$\ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t) - B\omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\left[-A\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t) - B\omega_n^2 \cos(\omega_n t)\right] + \omega_n^2 \left[A \operatorname{sen}(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t)\right] = 0$$

Con lo que se muestra que la expresión para x es la solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$.

Las constantes de integración A y B en la ecuación de x generalmente se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, suponga que el bloque de la figura 1 (a) ha sido desplazado una distancia x_1 hacia la derecha desde su posición de equilibrio, y se le ha dado una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_1$ (positiva) dirigida hacia la derecha. Sustituyendo $x = x_1$ en $t = 0$ en la ecuación de x, se obtiene:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t)$$

$$x_1 = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 = 0 + B \rightarrow B = x_1$$

Como $v = v_1$ en $t = 0$, usando la expresión de la velocidad, tenemos:

$$v = A\omega_n \cos(\omega_n t) - B\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

$$v_1 = A\omega_n \cos(0) - B\omega_n \operatorname{sen}(0) = A\omega_n$$

$$A = \frac{v_1}{\omega_n}$$

Si sustituimos estos dos valores en la expresión para x, la ecuación que describe el movimiento es:

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \tag{6}$$

La expresión para x también se puede expresar en términos de un movimiento senoidal simple. Sea:

$$A = C\cos\phi \tag{7}$$

$$B = C\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{8}$$

donde C y ϕ son nuevas constantes por determinar en lugar de A y B. Sustituyendo en la expresión para x resulta:

$$x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t)$$

$$x = C\cos\phi\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t) + C\,\mathrm{sen}\,\phi\cos(\omega_n t)$$

Recordando de las identidades trigonométricas,

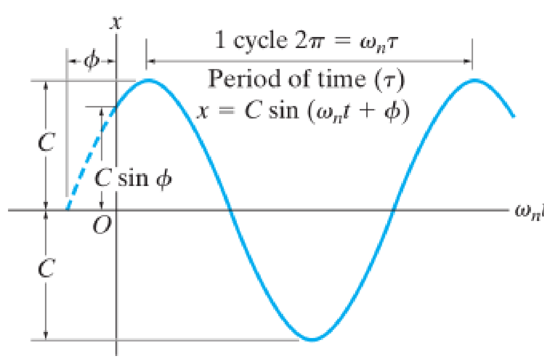
$$\mathrm{sen}\,(\theta+\phi) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\theta = \omega_n t$$

Entonces:

$$x = C\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t + \phi) \tag{9}$$

Si esta ecuación se grafica sobre un eje x contra un eje $\omega_n t$ se obtiene la figura 3. El desplazamiento máximo del bloque desde su posición de equilibrio se define como la *amplitud* de la vibración. En nuestro caso se representa por C. El ángulo ϕ se llama *ángulo de fase* y representa la cantidad que la curva se debe desplazar desde el origen cuando $t = 0$.



$$x = C\,\mathrm{sen}\,(\omega_n t + \phi)$$

Figura 3: Ecuación que describe el movimiento en vibración libre sin amortiguamiento.

Las constantes C y ϕ están relacionadas con A y B mediante las ecuaciones 7 y 8. Elevando al cuadrado y sumando estas dos ecuaciones, la amplitud se convierte en:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{10}$$

Si la ecuación de B se divide entre la ecuación de A, se obtiene una expresión para calcular el ángulo de fase ϕ:

$$\frac{B}{A} = \frac{C \operatorname{sen} \phi}{C \cos \phi} = \tan \phi \rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \tag{11}$$

Observe que la curva de seno (ecuación $x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$) completa un *ciclo* en el tiempo $t = \tau$ cuando $\omega_n \tau = 2\pi$. O bien,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{12}$$

Este intervalo de tiempo se llama *periodo*. Usando la ecuación 1, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13}$$

La *frecuencia* f se define como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, y es el recíproco del periodo:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{14}$$

O bien,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

La frecuencia se expresa en ciclos por segundo. Esta razón de unidades se llama *hertz* (Hz), donde 1 Hz es 1 ciclo/s = 2π rad/s.

Cuando un cuerpo, o un sistema de cuerpos conectados, experimenta un desplazamiento inicial desde su posición de equilibrio y es liberado, vibrará con la *frecuencia natural* ω_n. Si el cuerpo tiene un solo grado de libertad, esto es, si únicamente requiere de una coordenada para especificar completamente la posición del sistema en cualquier momento, entonces el movimiento vibratorio del cuerpo tendrá las mismas características que el movimiento armónico simple del bloque y el resorte que acabamos de presentar. En consecuencia, el movimiento del cuerpo es descrito por una ecuación diferencial de la misma “forma estándar” que la ecuación 2.

Por lo tanto, si la frecuencia natural ω_n del cuerpo se conoce, el periodo de vibración τ, la frecuencia natural f, y otras características vibratorias del cuerpo pueden ser establecidas usando las ecuaciones presentadas.

1. Puntos importantes

- La vibración libre ocurre cuando el movimiento se mantiene gracias a fuerzas restauradoras gravitatorias o elásticas.
- La amplitud es el desplazamiento máximo del cuerpo.
- El periodo es el tiempo requerido para completar un ciclo.
- La frecuencia es el número de ciclos efectuados por unidad de tiempo, donde 1 Hz = 1 ciclo/s.
- Sólo una coordenada de posición es necesaria para describir la ubicación de un sistema con un grado de libertad.

2. Procedimiento de análisis

Como en el caso del bloque y el resorte, la frecuencia natural, ω_n de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos conectados con un solo grado de libertad, puede ser determinada usando el siguiente procedimiento:

2.1. Diagrama de cuerpo libre

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando éste esté desplazado una *pequeña cantidad* desde su posición de equilibrio.
- Ubique el cuerpo con respecto a su posición de equilibrio usando una *coordenada inercial* q apropiada. La aceleración del centro de masa $\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$ del cuerpo o la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo deben tener un sentido en la *dirección positiva* de la coordenada de posición.
- Si la ecuación del movimiento rotacional $\Sigma M_P = \Sigma \left(\mathcal{M}_k\right)_P$ se va a usar, puede ser conveniente trazar también el diagrama cinético ya que ahí se toman en cuenta gráficamente las componentes $m\left(\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}\right)_x$, $m\left(\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}\right)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, y por eso resulta útil para visualizar los términos necesarios en la suma de momentos $\Sigma\left(\mathcal{M}_k\right)_P$.

2.2. Ecuación de movimiento

- Aplique la ecuación de movimiento para relacionar las fuerzas o los momentos de par *restauradores* elásticos o gravitatorios que actúan sobre el cuerpo al movimiento acelerado del cuerpo.

2.3. Cinemática

- Con ayuda de la cinemática, exprese el movimiento acelerado del cuerpo en términos de la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición, $\ddot{q}$.
- Sustituya el resultado en la ecuación de movimiento y determine ω_n, reordenando los términos de manera que la ecuación resultante sea de la "forma estándar", $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.