VECTORES CARTESIANOS Y SU SUMA Y RESTA

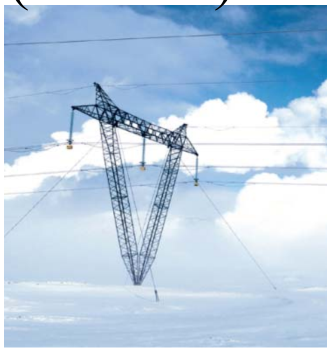
Objetivos de hoy:

Los estudiantes serán capaces de:

a) Representar un vector en 3-D en el Sistema de coordenadas Cartesiano.

b) Encontrar la magnitud y los ángulos coordenados de un vector 3-D.

c) Sumar vectores (fuerzas) en el espacio 3D.



Actividades en clase:

- Prueba de lectura
- Aplicaciones/Relevancia
- El Vector Unitario
- Términos Vectoriales 3-D
- Suma de Vectores
- Prueba conceptual
- Ejemplos
- Prueba de atención

PRUEBA DE LECTURA

1. El álgebra vectorial, como la vamos a usar, se basa en un Sistema coordenado ____________.

   A) Euclidiano B) De la mano izquierda

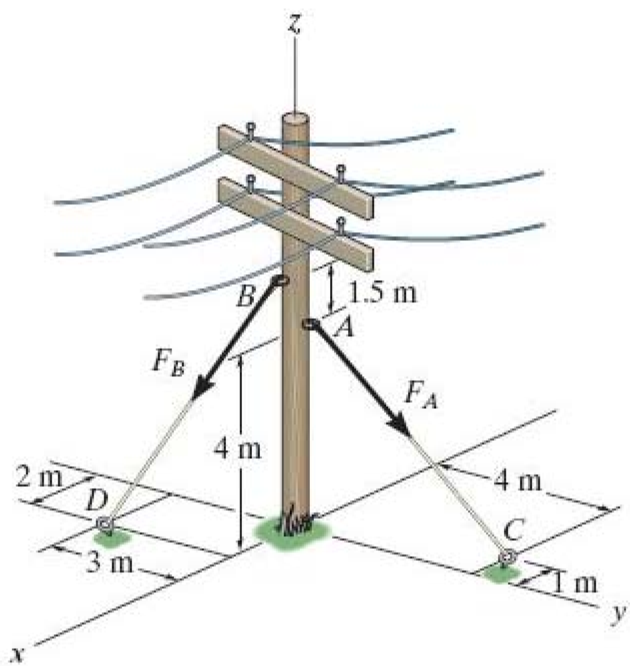
   C) Griego D) De la mano derecha E) Egipcio

2. Los símbolos α, β, y γ designan a ___________ de un vector Cartesiano 3-D.

   A) los vectores unitarios B) los ángulos directores coordenados

   C) la magnitud, dirección y sentido D) las componentes X, Y y Z

APLICACIONES

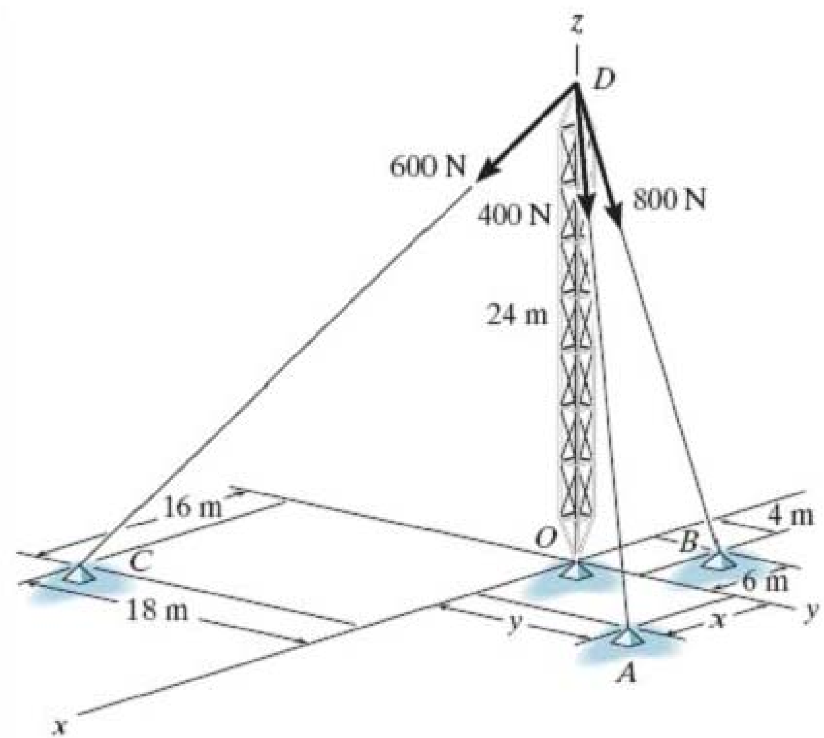


Muchas estructuras y máquinas involucran al espacio tridimensional.

En este caso, el poste de energía eléctrica tiene tirantes que lo ayudan a mantenerlo firme ante fuertes vientos. ¿Cómo representaría las fuerzas en los cables utilizando la forma vectorial Cartesiana?

APLICACIONES (Continuada)

En el caso de esta torre de radio, si usted conoce las fuerzas en los tres cables, ¿cómo determinaría la fuerza resultante actuando en D, en la parte superior de la torre?



VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS

Para un vector ***A***, con una magnitud de A, un vector unitario se define como:

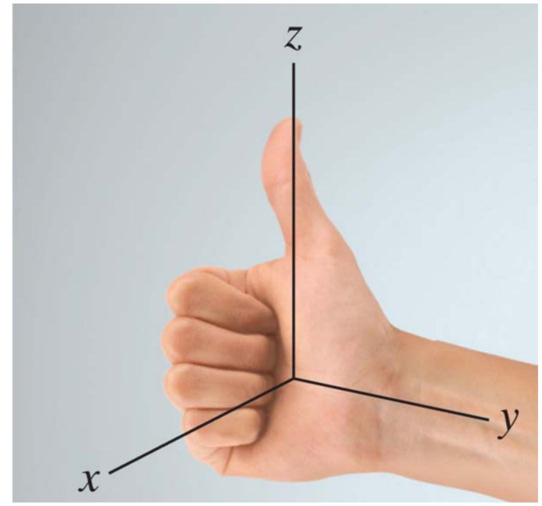
$$\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{A} \,/\, A \,.$$

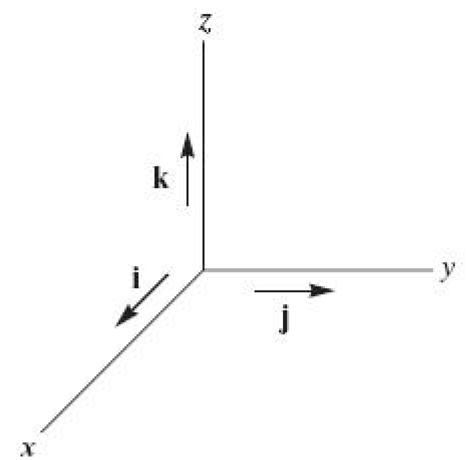
Características del vector unitario**:**

a) Su magnitud es 1.

b) Es adimensional (no tiene unidades).

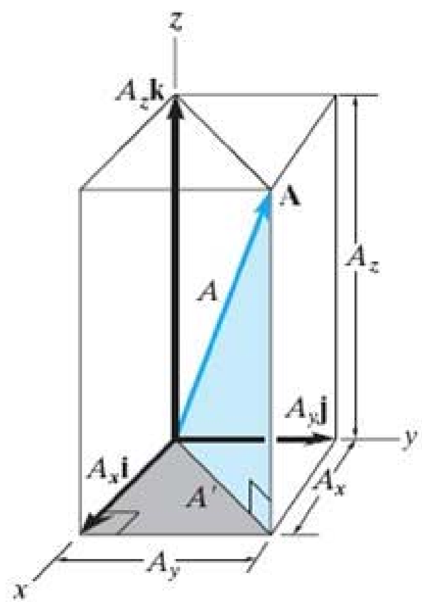
c) Apunta en la misma dirección que el vector original (***A***).





Los vectores unitarios en el Sistema de ejes Cartesianos son ***i***, ***j***, y ***k***. Son vectores unitarios a lo largo de los ejes *x*, *y*, y *z* positivos, respectivamente.

REPRESENTACIÓN VECTORIAL CARTESIANA



Considere una caja de A_X, A_Y, y A_Z metros de largo.

El vector ***A*** se puede definir como

$$\boldsymbol{A} = (A_X\, \boldsymbol{i} + A_Y\, \boldsymbol{j} + A_Z\, \boldsymbol{k})\ \text{m}$$

La proyección del vector ***A*** en el plano x-y es A´. La magnitud de A´ se encuentra usando el mismo método que en un vector 2-D: $A' = (A_X^2 + A_Y^2)^{1/2}$.

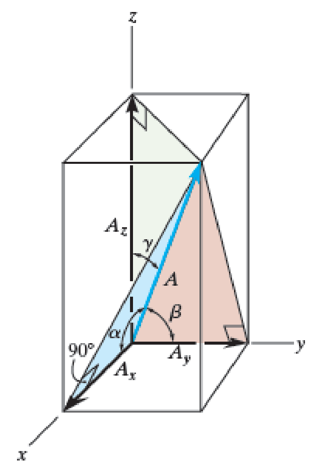
La magnitud del vector de posición ***A*** se puede obtener ahora como

$$A = ((A')^2 + A_Z^2)^{½} = (A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2)^{½}$$

DIRECCIÓN DE UN VECTOR CARTESIANO

La dirección u orientación del vector **A** se define por los ángulos α, β, y γ.

Estos ángulos se miden entre el vector y sus ejes X, Y y Z positivos, respectivamente. Su rango va desde 0° hasta 180°.



Usando trigonometría, se encuentran los "cosenos directores" empleando:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

Estos ángulos no son independientes. Deben satisfacer la siguiente ecuación.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Este resultado se puede derivar a partir de la definición de un ángulo director coordenado y el vector unitario. Recuerde la fórmula para hallar al vector unitario de cualquier vector de posición:

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$

o escrito de otra forma, $\boldsymbol{u}_A = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$.

SUMA DE VECTORES CARTESIANOS
(Sección 2.6)

Una vez que los vectores individuales han sido escritos en la manera Cartesiana, es fácil sumarlos o restarlos. El proceso es esencialmente el mismo que cuando se suman vectores 2-D.

$$\boxed{\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}}$$

Por ejemplo, si

$$\boldsymbol{A} = A_X \, \boldsymbol{i} + A_Y \, \boldsymbol{j} + A_Z \, \boldsymbol{k} \quad \text{y}$$

$$\boldsymbol{B} = B_X \, \boldsymbol{i} + B_Y \, \boldsymbol{j} + B_Z \, \boldsymbol{k}, \quad \text{entonces}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_X + B_X)\, \boldsymbol{i} + (A_Y + B_Y)\, \boldsymbol{j} + (A_Z + B_Z)\, \boldsymbol{k}$$

ó

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_X - B_X)\, \boldsymbol{i} + (A_Y - B_Y)\, \boldsymbol{j} + (A_Z - B_Z)\, \boldsymbol{k}\,.$$

NOTAS IMPORTANTES

Algunas veces, la información de los vectores en 3-D se da como:

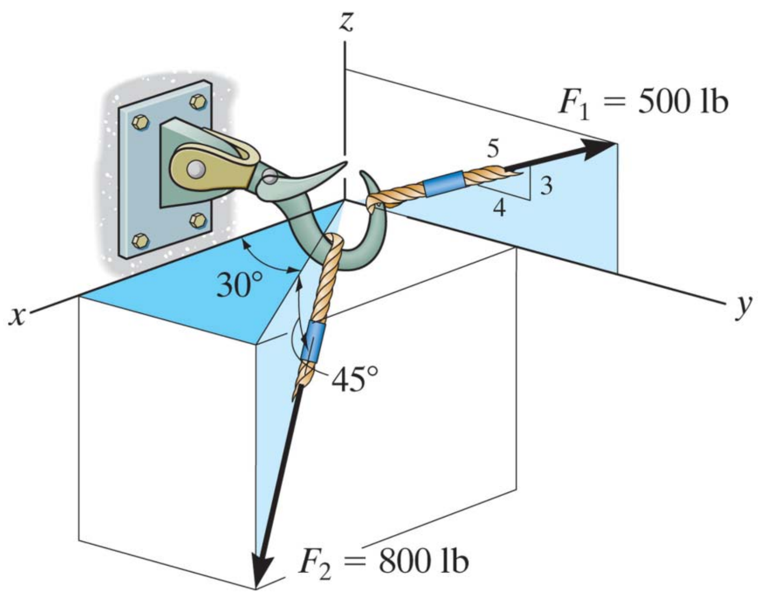
a) La magnitud y los ángulos directores coordenados, o,

b) La magnitud y los ángulos de las proyecciones.

Usted debe ser capaz de emplear ambos conjuntos de información para cambiar la representación del vector a la forma Cartesiana, es decir,

$$\boldsymbol{F} = \{10\,\boldsymbol{i} - 20\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}\}\ \text{N}\ .$$

EJEMPLO



Dado: Dos fuerzas ***F₁*** y ***F₂*** se aplican al gancho.

Hallar: La fuerza resultante en la forma vectorial Cartesiana.

Plan:

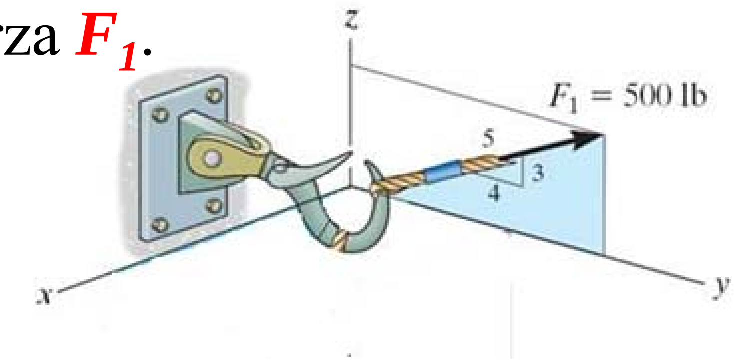
1) Empleando geometría y trigonometría, escriba $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ en la forma vectorial Cartesiana.

2) Luego sume las dos fuerzas (añadiendo las componentes *x* y *y*).

EJEMPLO (Continuado)

Solución:

Primero, descomponga la fuerza $\boldsymbol{F_1}$.



$F_x = 0 = 0$ lb

$F_y = 500\ (4/5) = 400$ lb

$F_z = 500\ (3/5) = 300$ lb

Ahora, escriba $\boldsymbol{F_1}$ en la forma vectorial Cartesiana (¡no olvide las unidades!).

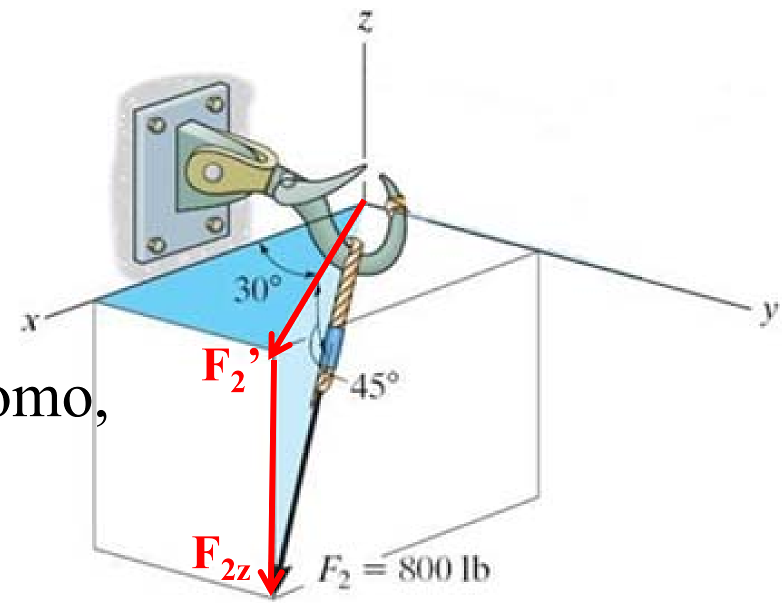
$\boldsymbol{F_1} = \{0\ \boldsymbol{i} + 400\ \boldsymbol{j} + 300\ \boldsymbol{k}\}$ lb

EJEMPLO (Continuado)

Ahora, resuelva la fuerza $\boldsymbol{F_2}$.

$F_{2z} = -800 \sin 45° = -565.7$ lb

$F_2' = 800 \cos 45° = 565.7$ lb



F_2' se puede seguir descomponiendo como,

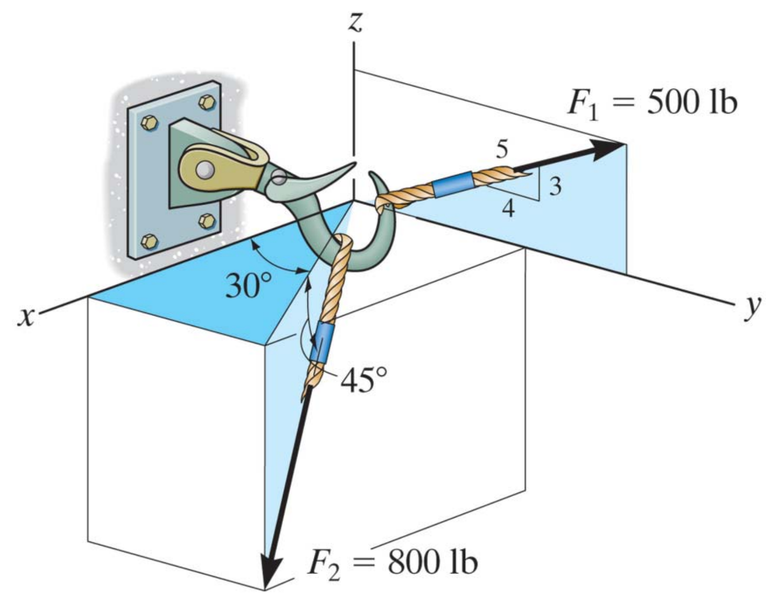
$F_{2x} = 565.7 \cos 30° = 489.9$ lb

$F_{2y} = 565.7 \sin 30° = 282.8$ lb

Entonces, podemos escribir:

$\boldsymbol{F_2} = \{489.9\,\boldsymbol{i} + 282.8\,\boldsymbol{j} - 565.7\,\boldsymbol{k}\}$ lb

EJEMPLO (Continuado)



Así que $\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$ y

$\boldsymbol{F_1} = \{0\ \boldsymbol{i} + 400\ \boldsymbol{j} + 300\ \boldsymbol{k}\}$ lb

$\boldsymbol{F_2} = \{489.9\ \boldsymbol{i} + 282.8\ \boldsymbol{j} - 565.7\ \boldsymbol{k}\}$ lb

$\boldsymbol{F_R} = \{\ \underline{490\ \boldsymbol{i}} + \underline{683\ \boldsymbol{j} - 266\ \boldsymbol{k}}\ \}$ $\underline{\text{lb}}$

PRUEBA CONCEPTUAL

1. Si usted sólo conoce $\boldsymbol{u}_A$, usted puede determinar _________ de $\boldsymbol{A}$ de forma única.

   A) la magnitud

   B) los ángulos (α, β y γ)

   C) las componentes (A_X, A_Y, & A_Z)

   D) Todas las anteriores.

2. Para un vector de fuerza, se generaron los siguientes parámetros aleatoriamente. La magnitud es 0.9 N, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 100^\circ$. ¿Qué tiene equivocado este vector 3-D?

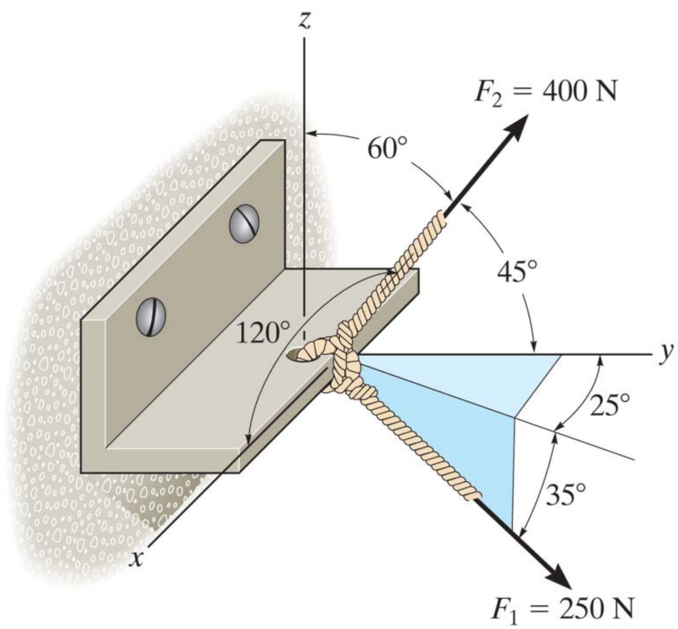
   A) La magnitud es muy pequeña.

   B) Los ángulos son muy grandes.

   C) Todos los tres ángulos fueron escogidos aleatoriamente.

   D) Todos los ángulos están entre 0° y 180°.

SOLUCIÓN DE PROBLEMA GRUPAL



Dado: La armella está sometida a dos fuerzas, $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$.

Hallar: La magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

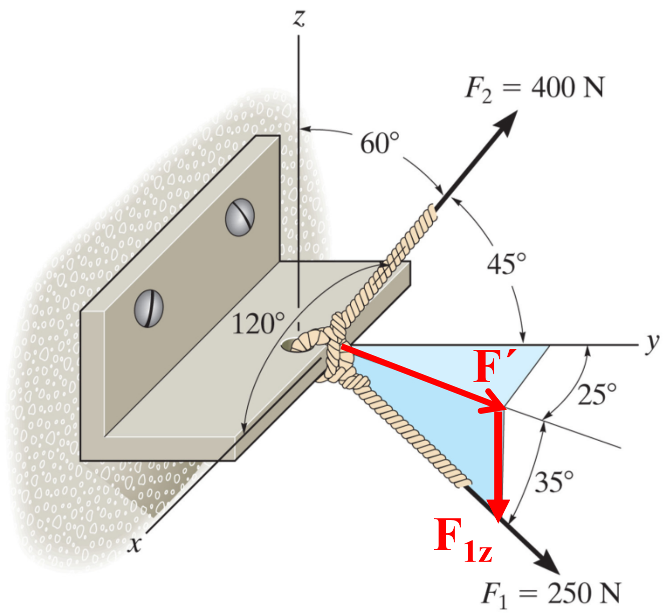
Plan:

1) Empleando geometría y trigonometría, descomponga y escriba $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ en la forma vectorial Cartesiana.

2) Añada $\boldsymbol{F_1}$ con $\boldsymbol{F_2}$ para obtener $\boldsymbol{F_R}$.

3) Determine la magnitud y los ángulos α, β, γ.

SOLUCIÓN DE PROBLEMA GRUPAL (Continuada)



Primero resuelva la fuerza $\boldsymbol{F_1}$.

$F_{1z} = -250 \sin 35° = -143.4$ N

$F' = 250 \cos 35° = 204.8$ N

F´ se puede seguir descomponiendo como,

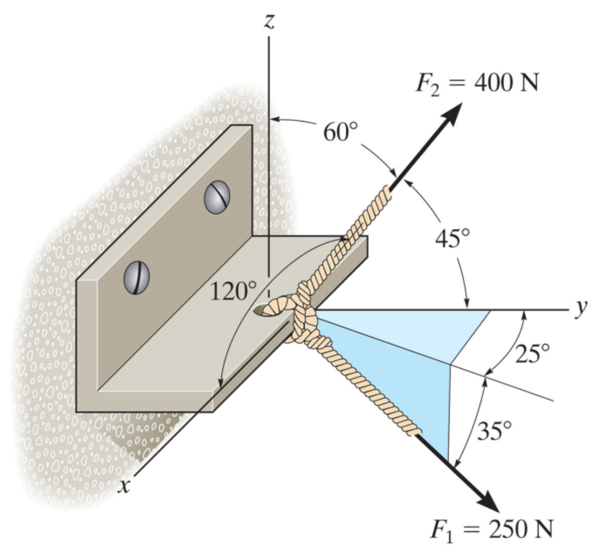
$F_{1x} = 204.8 \sin 25° = 86.6$ N

$F_{1y} = 204.8 \cos 25° = 185.6$ N

Ahora podemos escribir:

$\boldsymbol{F_1} = \{86.6\ \boldsymbol{i} + 185.6\ \boldsymbol{j} - 143.4\ \boldsymbol{k}\}$ N

SOLUCIÓN DE PROBLEMA GRUPAL (Continuada)



Ahora, descomponga la fuerza $\boldsymbol{F_2}$.

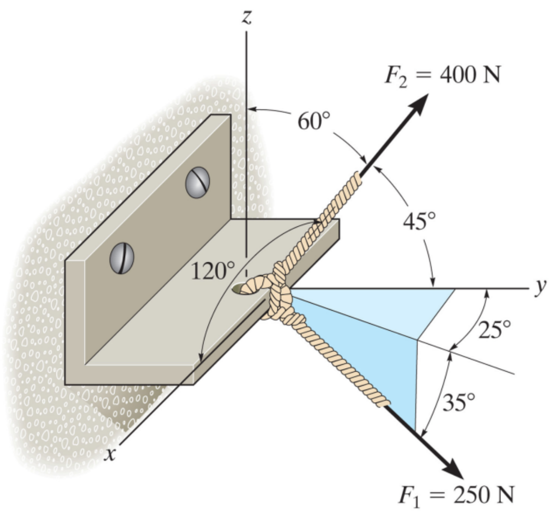
La fuerza $\boldsymbol{F_2}$ se puede representar en la forma vectorial Cartesiana como:

$$\boldsymbol{F_2} = 400\{\cos 120°\ \boldsymbol{i} + \cos 45°\ \boldsymbol{j} + \cos 60°\ \boldsymbol{k}\}\ \text{N}$$

$$= \{-200\ \boldsymbol{i} + 282.8\ \boldsymbol{j} + 200\ \boldsymbol{k}\}\ \text{N}$$

$$\boldsymbol{F_2} = \{-200\ \boldsymbol{i} + 282.8\ \boldsymbol{j} + 200\ \boldsymbol{k}\}\ \text{N}$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMA GRUPAL (Continuada)



Así que $\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$ y

$\boldsymbol{F_1} = \{ 86.6\, \boldsymbol{i} + 185.6\, \boldsymbol{j} - 143.4\, \boldsymbol{k}\}$ N

$\boldsymbol{F_2} = \{ -200\, \boldsymbol{i} + 282.8\, \boldsymbol{j} + 200\, \boldsymbol{k}\}$ N

$\boldsymbol{F_R} = \{ -113.4\, \boldsymbol{i} + 468.4\, \boldsymbol{j} + 56.6\, \boldsymbol{k}\}$ N

Ahora encuentre la magnitud y los ángulos directores del vector.

$F_R = \{(-113.4)^2 + 468.4^2 + 56.6^2\}^{1/2} = 485.2 = \underline{485 \text{ N}}$

$\alpha = \cos^{-1} (F_{Rx} / F_R) = \cos^{-1} (-113.4 / 485.2) = \underline{104°}$

$\beta = \cos^{-1} (F_{Ry} / F_R) = \cos^{-1} (468.4 / 485.2) = \underline{15.1°}$

$\gamma = \cos^{-1} (F_{Rz} / F_R) = \cos^{-1} (56.6 / 485.2) = \underline{83.3°}$

PRUEBA DE ATENCIÓN

1. ¿Qué no es cierto sobre el vector unitario, p. ej., $\boldsymbol{u_A}$?

   A) Es adimensional.

   B) Su magnitud es de uno.

   C) Siempre apunta en la dirección del eje X positivo.

   D) Siempre apunta en la dirección del vector $\boldsymbol{A}$.

2. Si $\boldsymbol{F} = \{10\,\boldsymbol{i} + 10\,\boldsymbol{j} + 10\,\boldsymbol{k}\}$ N y

   $\boldsymbol{G} = \{20\,\boldsymbol{i} + 20\,\boldsymbol{j} + 20\,\boldsymbol{k}\}$ N, luego $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \{$ _____ $\}$ N

   A) $10\,\boldsymbol{i} + 10\,\boldsymbol{j} + 10\,\boldsymbol{k}$

   B) $30\,\boldsymbol{i} + 20\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$

   C) $-10\,\boldsymbol{i} - 10\,\boldsymbol{j} - 10\,\boldsymbol{k}$

   D) $30\,\boldsymbol{i} + 30\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$